

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
OBSERVATÓRIO NACIONAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA



TESE DE DOUTORADO

ASPECTOS OBSERVACIONAIS EM TEORIAS $f(R)$ NO
FORMALISMO DE PALATINI

BEETHOVEN DOS SANTOS

RIO DE JANEIRO, 2 DE AGOSTO DE 2013

Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação
Observatório Nacional
Programa de Pós-Graduação em Astronomia

Tese de Doutorado

Aspectos Observacionais em Teorias $f(R)$ no Formalismo de Palatini

Beethoven dos Santos

Tese submetida ao Observatório Nacional
do Rio de Janeiro como parte dos requisitos
para a obtenção do título de DOUTOR
em Astronomia.

Orientador: Jailson Souza de Alcaniz

Rio de Janeiro, 2 de agosto de 2013

Aos meus pais.

Agradecimentos

Algumas das pessoas que citarei abaixo contribuíram diretamente na produção desta tese. Mas todas elas, sem exceção, influenciaram diretamente na minha vida, tanto no aspecto profissional quanto no pessoal. Sou imensamente grato:

- Aos meus pais, por seu amor infinito e por me proporcionarem oportunidades que nunca tiveram, tornando possível eu chegar aonde jamais imaginaram para si mesmos.
- Aos meus irmãos. Embora pareça óbvio, é notável como as leis da física perdem o sentido quando aplicadas ao contexto humano. Certos laços aumentam drasticamente com a distância.
- À Flávia, por seu amor indispensável nas melhores e piores horas. Sua compreensão nos momentos decisivos desta tese não foi algo deste mundo.
- Ao Prof. Jailson Alcaniz, por me ensinar o profissionalismo necessário para eu avançar cada vez mais em minha carreira; por sua amizade, compreensão e, principalmente, paciência em todos estes anos de convivência e, mais ainda, nos últimos momentos desta tese.
- À Marcela Campista. Fui conhecer uma parceira de trabalho e acabei ganhando, além disso, uma grande amiga. Só precisa ficar um pouco mais no chão (literalmente).
- Aos membros e ex-membros do Grupo de Cosmologia do Observatório Nacional (GCON) Edésio, Ernandes, Aldinêz, Carlos, Gabriela, Javier e Rodrigo, pelas ótimas conversas nestes anos. As conversas úteis foram úteis, mas as inúteis foram mais úteis ainda (foram elas que fortaleceram as amizades).
- Ao casal João “Alagoas” Victor & Raquel “Amanda” Giffoni e aos amigos Askery Alexandre, Nobar Baella e José Sérgio, pela ótima amizade e convivência nestes anos. Meus dias se tornaram bem mais “digeríveis” por causa deles.
- Aos amigos Gustavo Pinheiro, Orlando Katime, Vladimir Jearim, Anderson Ribeiro, Jorge Gonzales e demais colegas e funcionários do Observatório Nacional. Todos eles contribuíram de forma direta na minha formação, como humano e como profissional.
- A CAPES, pelo indispensável apoio financeiro, e
- A Deus, por permitir tudo isto.

Resumo

Aspectos Observacionais em Teorias $f(R)$ no Formalismo de Palatini Beethoven dos Santos

Tese submetida ao Observatório Nacional do Rio de Janeiro em 19 de abril de 2013,
como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Astronomia.

Como consequência da vasta quantidade de resultados observacionais existentes nos dias de hoje, é consenso entre os cosmólogos que uma das principais características do Universo atual é sua expansão acelerada. No entanto, a origem desta aceleração ainda constitui o maior desafio da cosmologia nos dias de hoje. No contexto da Relatividade Geral, podemos explicar esta aceleração mediante a inclusão de uma componente exótica de energia com pressão negativa, a chamada energia escura. Mas os problemas dos principais candidatos neste contexto, dentre eles, a constante cosmológica, alimentam o crescente interesse na busca por explicações alternativas para o mecanismo da aceleração. Teorias $f(R)$ examinam a possibilidade de modificação da Relatividade Geral de modo a explicar a expansão acelerada do Universo sem necessidade de supor a existência de uma componente adicional de energia. Estas teorias modificam a Lagrangiana de Einstein–Hilbert pela substituição do escalar de Ricci R por uma função $f(R)$ mais geral. As equações de campo que governam a dinâmica cósmica nessas teorias dependem do formalismo variacional adotado.

Nesta tese, nós investigamos as consequências cosmológicas de alguns modelos $f(R)$ no formalismo variacional de Palatini. Três cenários foram investigados, a saber: os modelos exponencial, de Hu–Sawicki e lei-de-potência. Para todos eles, realizamos análises observacionais com dados da relação magnitude–*redshift* de SNs Ia, estimativas da taxa da expansão cósmica $H(z)$ e estimativas da razão CMB/BAO, que consiste no produto da escala acústica da radiação cósmica de fundo ℓ_A com a posição do pico das oscilações acústicas bariônicas. Para os modelos de Hu–Sawicki e lei-de-potência, análises envolvendo observações atuais de aglomerados de galáxias também foram realizadas.

Para cada modelo testado, nós realizamos uma análise de χ^2 , derivamos os vínculos teóricos sobre os parâmetros de cada modelo e determinamos o espaço de parâmetros permitido pelas observações atuais. Para completar nossas análises, construímos a história da expansão para

cada modelo investigado. Nossos resultados mostram que, pelo menos no nível do *background*, os dados utilizados não permitem a distinção entre os modelos testados no formalismo de Palatini e o modelo Λ CDM.

Diferentemente de resultados anteriores para estes modelos no formalismo métrico, nós mostramos que estes cenários podem reproduzir a sequência padrão das eras cosmológicas (era da radiação, era da matéria e era da aceleração), mesmo sem a inclusão da energia escura. No caso do modelo $f(R)$ exponencial, ainda é possível mostrar que a aceleração do universo pode ser um fenômeno transitório, com o estágio atualmente acelerado sendo seguido por uma nova fase dominada pela matéria.

Palavras chaves: Cosmologia; gravidade modificada; teorias $f(R)$; formalismo de Palatini; aceleração cósmica.

Abstract

Observational Aspects of the $f(R)$ Theories in Palatini Formalism Beethoven dos Santos

Thesis submitted to the Observatório Nacional of Rio de Janeiro on April 19th, 2013,
in partial fulfillment of the requirements for the Doctor's degree in Astronomy.

As consequence of the vast amount of observational results available today, it is consensus among cosmologists that one of the main features of our universe is its accelerated expansion. However, understanding the origin of this acceleration is still one of the biggest challenges in cosmology today. In the context of General Relativity, it is possible to explain this acceleration by including an exotic energy component with negative pressure, the so-called dark energy. But the problems of the main candidates in this context, among them, the cosmological constant, motivate the increasing interest in the search for alternatives explanations to the mechanism of acceleration. $f(R)$ theories examine the possibility of modifications in General Relativity in order to explain the accelerated expansion of the Universe without introducing a dark energy component. These theories modify the Einstein–Hilbert Lagrangian by replacing the Ricci scalar R for a more general function $f(R)$. The field equations that drives the cosmic dynamics in these theories depend on the variational formalism adopted.

In this thesis, we investigated the cosmological consequences of some $f(R)$ models in the Palatini formalism. Three scenarios have been investigated, i.e.: the exponential, Hu–Sawicki and power-law models. We have performed observational analyses using data of the magnitude-redshift relation of SNe Ia, estimates of the expansion rate $H(z)$ and current measurements of the CMB/BAO ratio, i.e. the product of the cosmic microwave background acoustic scale ℓ_A with the position of the baryon acoustic oscillations peak. For the Hu–Sawicki and power-law models, analyses involving current observations of galaxy clusters were also performed.

For each model test, we performed an χ^2 analysis, derived theoretical constraints on the model parameters and determined the parametric space allowed by current observational data. To complete our analyses, we construct the expansion history for each model. Our results shows that, at least at the background level, the observational data used here do not allow the distinction between the models tested in the Palatini formalism and the Λ CDM model.

In contrast to previous results for these models with the metric approach, we show that these scenarios are able to produce the standard sequence of radiation-dominated, matter-dominated and accelerating eras, without need of dark energy. In the case of the exponential model, it is possible to show that the current cosmic acceleration can be transitory phenomenon, with the present-day epoch being followed by a new matter-dominated era.

Keywords: Cosmology; modified gravity; $f(R)$ theories; Palatini formalism; cosmic acceleration.

Lista de figuras

1.1. Evolução do número de artigos submetidos ao ArXiv, tendo modificações na gravidade como tema.	4
2.1. Resultado final do HST para a constante de Hubble.	15
2.2. Ajuste de um espectro de corpo negro da CMB com dados COBE/FIRAS.	17
2.3. Mapa das flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo obtido pelo satélite Planck.	18
2.4. Espectro de potência da CMB em função do momento ℓ e da escala angular $\theta = \pi/\ell$, juntamente com os dados do 7º ano de resultados do WMAP.	19
3.1. Evolução do parâmetro de desaceleração $q(z)$ para alguns modelos de energia escura.	38
5.1. Evolução da equação de estado relacionada com a modificação na gravidade para o modelo exponencial investigado por Yang et al. (2010).	70
5.2. Evolução de $H(z)$ e $\mu(z)$ para o modelo exponencial no formalismo de Palatini.	73
5.3. Evolução de $q(z)$ e w_{ef} para o modelo exponencial no formalismo de Palatini.	74
6.1. Curvas de f_{R0} do modelo de Hu–Sawicki para $y_0 \leq 3$ (linhas tracejadas) e $y_0 > 3$ (linhas contínuas).	82
6.2. Evolução de $H(z)$ e $\mu(z)$ para o modelo de Hu–Sawicki no formalismo de Palatini.	84
6.3. Regiões de confiança para os parâmetros do modelo de Hu–Sawicki no formalismo de Palatini.	85
6.4. Evolução de $q(z)$ e w_{ef} para o modelo de Hu–Sawicki no formalismo de Palatini.	86
7.1. Reprodução de Pires et al. (2010) mostrando a evolução do parâmetro de desaceleração $q(z)$ e o <i>redshift</i> da primeira transição para o modelo lei-de-potência e diversos valores de n	91
7.2. Regiões de confiança no plano $\Omega_{\text{m}0} \times n$ para o modelo lei-potência no formalismo de Palatini.	94
7.3. Evolução de $q(z)$ e w_{ef} para o modelo de lei-de-potência no formalismo de Palatini.	95

Lista de tabelas

2.1. História térmica do Universo.	18
5.1. Resultados para o modelo exponencial no formalismo de Palatini.	73
6.1. Soluções da condição $G_{\text{ef}} > 0$ para o modelo de Hu–Sawicki.	81
6.2. Resultados para o modelo de Hu–Sawicki no formalismo de Palatini.	86
7.1. Alguns intervalos de confiança de 99,73% encontrados na literatura para os parâmetros n e β do modelo lei-de-potência.	92
7.2. Resultados para o modelo lei-de-potência no formalismo de Palatini.	93
A.1. Dados de CMB/BAO utilizados em nossas análises.	105
B.1. $\Delta\chi^2$ como função do nível de confiança e graus de liberdade.	109

Notações, convenções e símbolos

Ao longo desta tese, expressões em outros idiomas estarão escritas em *itálico*. No que diz respeito às unidades, adotaremos com frequência (exceto nos casos em que seja dito o contrário) unidades em que $c = a_0 = 1$. Além disso, o escalar de Ricci R será dado em unidades de H_0^2 e, embora seja comum o uso de $G = 1$ na literatura, não será utilizada tal notação. Ao invés disso, utilizaremos com frequência a definição $\kappa \equiv 8\pi G$. Por fim, a unidade de distância utilizada como padrão será o megaparsec (Mpc): $1 \text{ Mpc} = 3,26 \times 10^6 \text{ anos-luz} = 3,09 \times 10^{22} \text{ m}$.

No contexto matemático, a assinatura da métrica utilizada como padrão será $(- + ++)$. Durante todo o texto, índices gregos (α, β, \dots) irão variar de 0 a 3, enquanto os latinos (i, j, \dots) irão variar de 1 a 3. Índices repetidos irão obedecer a convenção de soma de Einstein. Uma tentativa foi realizada para se definir cada quantidade ou parâmetro em sua primeira ocorrência no texto. No entanto, a lista abaixo poderá ser útil no esclarecimento dos parâmetros mais frequentes.

Alguns símbolos:

$h_{\mu\nu}$	Métrica conforme
h	Determinante de $h_{\mu\nu}$
$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$	Símbolos de Christoffel da métrica $g_{\mu\nu}$
$\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$	Conexões de Levi-Civita da métrica $g_{\mu\nu}$
∇_{μ}	Derivada covariante formada com $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$
$\hat{\nabla}_{\mu}$	Derivada covariante formada com $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$
$\mathcal{R}_{\mu\beta\nu}^{\alpha}$	Tensor de curvatura generalizado
$\mathcal{R}_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci generalizado
\mathcal{R}	Escalar de Ricci generalizado
S_m	Ação da matéria
$T_{\mu\nu}$	Tensor energia-momento
ϕ	Campo escalar genérico
ψ	Campos de matéria (coletivamente)

Algumas siglas e abreviações utilizadas

- BAO *Baryon acoustic oscillations* (oscilações acústicas bariônicas)
- BD Brans–Dicke
- CDM *Cold dark matter* (matéria escura fria)
- CMB *Cosmic microwave background* (radiação cósmica de fundo)
- DGP Dvali–Gabadadze–Porrati
- FLRW Friedmann–Lemaître–Robert–Walker
- HST Hubble Space telescope
- LSS *Large scale structure* (estrutura de grande escala)
- MCP Modelo Cosmológico Padrão
- PC Princípio cosmológico
- RE Relatividade Especial
- RG Relatividade Geral
- SNs Ia Supernovas tipo Ia
- WMAP Wilkinson Microwave Anysotrope Probe

Informação eletrônica

A maioria das referências utilizadas nesta tese pode ser encontrada na *internet* nos seguintes endereços:

- arXiv: <http://arxiv.org>
- INSPIRE: <http://inspirehep.net>
- SAO/NASA ADS Labs: <http://labs.adsabs.harvard.edu/ui>

Sumário

Agradecimentos	vii
Resumo	ix
Abstract	xi
Lista de figuras	xiii
Lista de tabelas	xv
Notações, convenções e símbolos	xvii
Algumas siglas e abreviações utilizadas	xix
Informação eletrônica	xxi
1. Introdução	1
I. CONCEITOS TEÓRICOS	7
2. Relatividade Geral e o Modelo Cosmológico Padrão	9
2.1. Ferramentas da Relatividade Geral	10
2.2. As equações de campo da Relatividade Geral	11
2.3. O formalismo Lagrangiano da Relatividade Geral	12
2.4. O Modelo Cosmológico Padrão	13
2.4.1. Bases observacionais	13
2.4.2. Princípio cosmológico e a métrica de Robertson–Walker	20
2.4.3. Distâncias cosmológicas	21
2.4.4. Dinâmica da expansão e os parâmetros cosmológicos	25
2.5. Sumário	29
3. Além da Relatividade Geral: O problema da aceleração cósmica	31
3.1. As condições de energia	31
3.2. O conteúdo cósmico	32
3.3. Modificando a Relatividade Geral: conteúdo material	34
3.3.1. A constante cosmológica	34
3.3.2. Decaimento do vácuo	36
3.3.3. Modelos ϕ CDM (campo escalar)	36

3.3.4.	Modelos w CDM	37
3.3.5.	Gás de Chaplygin	39
3.4.	Modificando a Relatividade Geral: parte gravitacional	39
3.4.1.	Dimensões extras	39
3.4.2.	Teorias escalar-tensoriais	40
3.4.3.	Teorias $f(R)$	43
3.5.	Outras alternativas	43
3.6.	Sumário	44
4.	Teorias $f(R)$	45
4.1.	O formalismo métrico	47
4.1.1.	As equações de campo	47
4.1.2.	Equivalência com a teoria de Brans–Dicke	49
4.1.3.	Dinâmica cósmica	50
4.2.	O formalismo de Palatini	51
4.2.1.	As equações de campo	52
4.2.2.	Equivalência com a teoria de Brans–Dicke	55
4.2.3.	Dinâmica cósmica	56
4.3.	O formalismo métrico-afim	57
4.4.	Os <i>frames</i> de Jordan e de Einstein	58
4.5.	Dinâmica nas representações de Brans–Dicke	59
4.6.	Critérios de viabilidade	60
4.7.	Problemas no formalismo de Palatini	62
4.8.	Sumário	64
II.	ASPECTOS OBSERVACIONAIS	67
5.	Consequências cosmológicas de gravidade $f(R)$ exponencial	69
5.1.	O modelo	69
5.2.	Metodologia	71
5.3.	Resultados e discussão	73
5.3.1.	História cósmica	74
5.4.	Sumário	76
6.	Cosmologia de Hu–Sawicki no formalismo de Palatini	77
6.1.	O modelo	77
6.2.	Metodologia	79
6.3.	Resultados e discussão	83
6.3.1.	História cósmica	85
6.4.	Sumário	87
7.	Restrições da fração de gás de aglomerados galácticos sobre modelos tipo lei-de-potência	89
7.1.	O modelo	89

7.2. Metodologia	92
7.3. Resultados e discussão	93
7.3.1. História cósmica	95
7.4. Sumário	96
8. Conclusões e perspectivas	97
A. Observáveis utilizados nos testes cosmológicos	101
A.1. Relação magnitude- <i>redshift</i> de SNs Ia	101
A.2. Taxa da expansão cósmica	103
A.3. Fração de massa de gás em aglomerados de galáxias	103
A.4. Razão CMB/BAO	104
B. Ferramentas estatísticas	107
B.1. Teste de χ^2 e regiões de confiança	107
B.2. Marginalização de parâmetros	109
Referências	111

1 Introdução

Desenvolvimento das ideias em gravitação. Desde a antiguidade, a busca pela compreensão da natureza tem sido a nascente de diversas questões fundamentais sobre o Universo em que vivemos. Dos pensamentos dos filósofos gregos às descobertas de Sir Isaac Newton no século XVII, diversas teorias e visões tem alimentado a evolução dos principais conceitos sobre o nosso cosmos. Durante todo este tempo, uma atenção especial sempre foi reservada ao conhecimento do mecanismo pela qual todos os corpos gravitam, muito provavelmente motivada pelo fato de a gravidade estar relacionada com os fenômenos presentes na nossa vida diária.

Os primeiros estudos experimentais dos efeitos da gravidade terrestre sobre os corpos que a habitam foram realizados por Galileu Galilei no final do século XVI. Utilizando pêndulos e planos inclinados, Galileu implantou uma nova metodologia na investigação científica mostrando a necessidade da realização de experiências no estudo dos fenômenos naturais. Neste contexto, a gravidade terrestre teve um papel fundamental sobre as ideias de Galileu.

Cerca de um século após os experimentos de Galileu, Isaac Newton uniu a gravidade terrestre com a gravidade celeste em uma única teoria, a *Teoria da Gravitação Universal*. As ideias de Newton sobre a gravidade incorporavam dois conceitos importantes: a ideia de espaço absoluto e o chamado *princípio de equivalência fraco*, que define que as massas inerciais e gravitacionais são iguais. Sintetizando as leis da mecânica Newtoniana com a lei do inverso do quadrado, a teoria da gravitação de Newton obteve sucesso em explicar fenômenos tanto em escalas terrestres como em escalas planetárias. Isto fez com que a gravitação Newtoniana fosse considerada por muito tempo a teoria de gravidade correta, uma vez que ela descrevia todos os aspectos da gravidade conhecidos naquela época.

Com a extrapolação da teoria de Newton ao entendimento do Universo, a cosmologia começou a dar os primeiros passos como ciência. Mas apesar dos êxitos desta teoria, diversos problemas começaram a surgir nos anos que se seguiram. A teoria Newtoniana não era capaz, por exemplo, de prever o excesso na precessão da órbita de Mercúrio, medido por Urbain Le Verrier e Simon Newcomb, em 1855 e 1882, respectivamente. Além disso, os efeitos da gravitação Newtoniana ocorriam de forma instantânea e a teoria não fornecia uma explicação sobre a natureza da interação gravitacional, apenas descrevia suas consequências. Os primeiros ataques às ideias de Newton foram realizados ainda no século XVII por Gottfried Wilhelm Leibniz e, mais tarde, por Ernst Mach em 1893, através de um conceito posteriormente chamado por Albert Einstein

de *princípio de Mach*. Ambos colocavam dúvidas acerca da noção Newtoniana de espaço absoluto. Em resumo, o princípio de Mach estabelecia que a inércia de qualquer corpo tem que vir de sua interação com todas as outras massas do Universo. Isto entrava em contradição com a ideia de Newton na qual a inércia de um corpo sempre era relativa ao espaço absoluto. As ideias de Newton começaram a ser reconsideradas e o maior desafio para a gravitação Newtoniana ainda estaria por vir.

Foi em 1905 que Albert Einstein completou sua teoria da *Relatividade Especial* (RE), a partir de dois postulados: o *princípio da relatividade*, que diz que as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais, e a *constância da velocidade da luz*, que define um valor máximo para a velocidade de propagação das informações no vácuo e torna esse valor constante em todos os referenciais inerciais. O princípio da relatividade fez a Relatividade Especial de Einstein romper com o conceito de referencial absoluto de Newton. Uma drástica consequência desta nova teoria era que, embora ela fosse compatível com a teoria eletromagnética de Maxwell, ela indicava que a mecânica Newtoniana deveria ser apenas uma aproximação no limite de baixas velocidades comparadas à da luz. Em outras palavras, a Relatividade Especial estendia a mecânica de Newtoniana e seus conceitos de movimento relativo iam além das ideias de Galileu e Newton.

Mesmo obtendo sucesso na conciliação da óptica com a mecânica, a RE ainda carecia de limitações conceituais, sendo a principal delas a restrição a sistemas inerciais. Demorou exatos dez anos até o próprio Einstein incorporar a gravitação em sua teoria da relatividade e estender suas ideias aos sistemas não-inerciais. Sua nova teoria, a *Relatividade Geral* (RG), explicou notavelmente o problema da precessão de Mercúrio, além de prever com precisão a deflexão gravitacional dos raios de luz ao passarem pela vizinhança do Sol, tal como foi medido por Sir Arthur Eddington durante um eclipse solar em 1919. A diferença mais drástica entre a Relatividade Geral e a gravitação de Newton é que a primeira respondia a questão quanto a origem da gravidade. A RG é uma teoria geométrica do campo gravitacional. Nela, a gravidade não é uma força e sim uma consequência do fato que a geometria do espaço-tempo é modificada pela distribuição de matéria e energia presente. Devido aos sucessos observacionais nos anos que se seguiram, a RG “derrubou” a gravitação Newtoniana, tornando-a um caso limite para baixas velocidades e campos gravitacionais fracos. Ainda hoje, ela permanece como a mais bem aceita teoria para os fenômenos gravitacionais.

O Modelo Cosmológico Padrão e o *status* atual da cosmologia. A evolução das ideias a respeito do Universo sempre esteve ligada às mudanças na compreensão sobre a gravidade. O desenvolvimento da RG fez a cosmologia experimentar nos últimos cem anos as transformações mais radicais em seu curso. Estas transformações forneceram à cosmologia uma sólida base científica fazendo-a adquirir um caráter mais experimental em comparação ao cunho filosófico, metafísico e até mesmo religioso que ela carregou ao longo dos séculos.

Considera-se que o surgimento da cosmologia moderna ocorreu com a aplicação das equações de campo da RG na cosmologia, realizada pelo próprio Einstein dois anos após ele ter desenvolvido a RG. Mais tarde, os trabalhos de Einstein foram estendidos por de Sitter, Friedmann e Lemaître. Utilizando a RG em conjunto com o *princípio cosmológico* (PC)*, Einstein publicou,

* O princípio cosmológico estabelece que não há nem local nem direção preferencial na estrutura de grande escala do Universo.

em 1917 (Einstein 1917), o que é considerado o primeiro modelo cosmológico. Ele apresentou este modelo como uma solução para suas equações de campo, que descrevia um universo estático, de acordo com as ideias e observações de sua época. A solução elaborada por Einstein consistiu na introdução de um termo repulsivo nas equações de campo cujo efeito seria contrabalancear o efeito atrativo da gravitação. Tal termo é comumente chamado *constante cosmológica* e normalmente denotado pela letra grega Λ .

Recentemente, pesquisas envolvendo dados de distâncias de supernovas tipo Ia (SNs Ia), lideradas por Riess et al. (1998) e Perlmutter et al. (1999) têm corroborado a evidência de que, atualmente, o Universo passa por uma fase de expansão acelerada em escalas cosmológicas. Desde então, diversos modelos têm surgido na tentativa de se encontrar uma explicação plausível para a origem desta aceleração. No modelo mais aceito atualmente, o chamado *Modelo Cosmológico Padrão* (MCP), a RG juntamente com o *Princípio Cosmológico* (PC) e uma constante cosmológica governam a dinâmica do universo. As bases teóricas deste modelo se encontram em forte concordância com os resultados das observações astronômicas mais recentes. Tais resultados ainda reforçam a validade dos pilares que, juntos, constituem o MCP, ou seja, a expansão do Universo, a *nucleossíntese primordial* e a *radiação cósmica de fundo* (CMB) de $\approx 2,7$ K.

No cenário do MCP, o problema da aceleração é tratado através da inclusão de uma constante cosmológica ou, mais genericamente, uma componente de energia exótica, a chamada *energia escura*, com pressão negativa e responsável por cerca de $\approx 3/4$ da densidade do Universo. Os resultados observacionais que dão suporte à existência desta componente exótica de energia incluem medidas de distâncias de supernovas tipo Ia em *redshifts* intermediários e altos (Riess et al. 1998, Perlmutter et al. 1999, Riess et al. 2004, Astier et al. 2006, Sullivan et al. 2011, Suzuki et al. 2012), medições das anisotropias da radiação cósmica de fundo (de Bernardis et al. 2000, Komatsu et al. 2011), observações da estrutura de grande escala do Universo (LSS) (Spinrad et al. 1997, Eisenstein et al. 2005), estimativas da idade do Universo (Krauss & Turner 1995, Chaboyer 1998, Jimenez 1996, Alcaniz & Lima 1999), medidas da fração de gás em aglomerados de galáxias (Ettori et al. 2009), dentre outros.

Atualmente, o modelo mais simples e aceito para descrever a energia escura é o chamado *modelo de concordância cósmica* ou Λ CDM, onde a constante cosmológica Λ , com equação de estado $p = -\rho$ (onde ρ e p são a densidade de energia e a pressão, respectivamente), representa a densidade do vácuo e assume o papel de energia escura. No entanto, este modelo apresenta alguns problemas do ponto de vista teórico como, por exemplo, a enorme discrepância de aproximadamente 120 ordens de grandeza entre o valor estimado pela teoria quântica de campos para a densidade de energia do vácuo e o fornecido pelas observações cosmológicas para a constante cosmológica (este é o chamado “problema da constante cosmológica” (Weinberg 1989)). O completo desconhecimento acerca da natureza da energia escura nos leva atualmente a um dos principais problemas entre a física fundamental, a cosmologia e a astrofísica. Tal questão permanece em aberto nos dias de hoje e é consenso que sua resposta trará profundas modificações na física no seu nível mais fundamental, como no modelo padrão da física de partículas.

Alternativas à RG e as teorias $f(R)$. Os problemas do MCP mencionados acima foram os principais fatores que contribuíram para o crescente interesse por alternativas à energia escura.

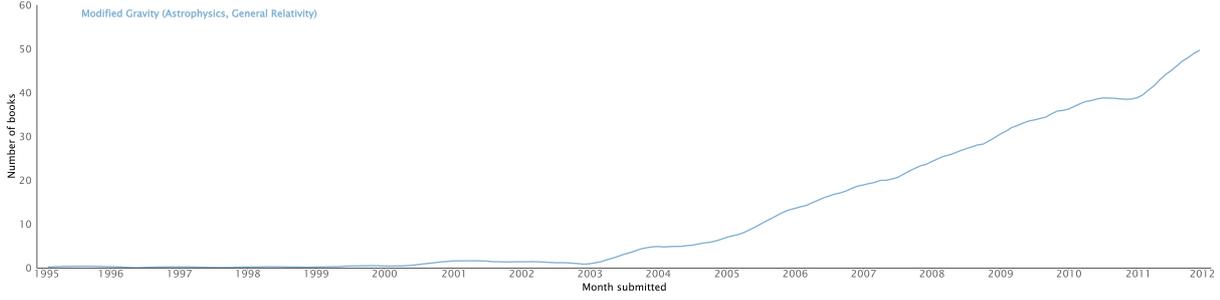


Figura 1.1.: Evolução do número de artigos sobre gravidade modificada que foram submetidos ao ArXiv nas duas últimas décadas. Fonte: *Bookworm arXiv* (<http://arxiv.culturomics.org>).

Nos últimos anos, a busca por modificações na RG que expliquem os dados cosmológicos atuais teve um aumento muito significativo (ver Fig. 1.1), abrindo um grande leque de possibilidades e propostas concorrentes ao MCP. Podemos citar como exemplos típicos de tais propostas os modelos de Branas (Maartens 2004). No entanto, uma outra classe de teorias que vem recebendo uma grande atenção por parte da comunidade científica são as chamadas teorias $f(R)$ (Nojiri & Odintsov 2007a, Capozziello & Francaviglia 2008, Sotiriou & Faraoni 2010, De Felice & Tsujikawa 2010a). Estas teorias se caracterizam por uma generalização da Lagrangiana na ação de Einstein–Hilbert da RG,

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1.1)$$

por uma função mais geral do escalar de Ricci R ,

$$S_f = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (1.2)$$

onde $\kappa \equiv 8\pi G$, G é a constante gravitacional de Newton, g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (ver seção 2.1) e consideramos unidades em que $c = 1^\dagger$.

Embora o aumento do interesse por mudanças na ação da gravidade seja relativamente recente, a tentativa de substituição do escalar de Ricci R por uma função $f(R)$ não é nova e esta tarefa já havia sido realizada bem antes da ideia de uma energia escura e mesmo a teoria da inflação terem sido propostas (Weyl 1919, Eddington 1923, Buchdahl 1970). No entanto, essas tentativas eram motivadas apenas pela curiosidade científica. Com a descoberta da expansão acelerada em 1998–99, um novo estímulo para as modificações na teoria de gravidade surgiu a partir das observações astrofísicas e cosmológicas. Desde então, diversos modelos $f(R)$ têm sido apresentados com a função de explicar a atual fase de expansão acelerada do Universo através da modificação da ação de Einstein–Hilbert e, conseqüentemente, das equações de campo advindas desta ação modificada (Capozziello et al. 2003, Carroll et al. 2004, Starobinsky 2007, Cognola et al. 2008, Hu & Sawicki 2007). O objetivo de tais modelos é a busca por soluções das equações de campo, que levam a evolução cósmica a uma aceleração recente, sem a necessidade de qualquer componente exótica de energia.

Vários trabalhos foram publicados nos últimos anos explorando as conseqüências teóricas e observacionais das modificações na RG. O que parece consenso é que as teorias $f(R)$ tendem

[†] Daqui em diante, a menos que a aparição de c seja extremamente necessária, utilizaremos unidades em que $c = 1$.

a ter sua funcionalidade dentro de certos regimes particulares. Um dos principais problemas que essas teorias enfrentam consiste na extensão de sua validade tanto em pequenas escalas (vizinhança solar, por exemplo) quanto em escalas cosmológicas. No entanto, sabe-se que este tipo de problema não afeta todas as formas de $f(R)$ existentes. Algumas formas específicas que estão em concordância com testes no Sistema Solar também aparentam serem viáveis em escala cosmológica (Hu & Sawicki 2007, Starobinsky 2007, Nojiri & Odintsov 2006, 2007b).

Teorias $f(R)$ examinam a possibilidade de modificação da RG em maior ou menor grau, de modo a explicar a expansão acelerada do Universo sem necessidade de supor a existência da energia escura. Como mencionado na anteriormente, a gravidade de Einstein é modificada através da substituição do escalar de curvatura R por uma função $f(R)$ na ação de Einstein–Hilbert. As equações de campo obtidas após o processo de extremização da ação irão depender fortemente do princípio variacional adotado. Neste caso temos, basicamente, duas formulações variacionais possíveis: a formulação métrica, em que o único campo livre da ação é dado pela métrica, e a formulação de Palatini, em que a métrica e as conexões são considerados campos independentes. Dependendo da formulação adotada, as equações de campos serão bastantes diferentes. Do ponto de vista puramente observacional, é importante mencionar que, apesar de explicar a expansão acelerada, a maioria das teorias $f(R)$ na formulação métrica tem apresentado problemas de estabilidade, além de, em alguns casos, não conseguir reproduzir a chamada era da matéria na expansão cosmológica (Amendola et al. 2007b) (veja também (Capozziello et al. 2006b) para uma conclusão diferente). Por outro lado, as teorias $f(R)$ na formulação de Palatini, além de explicarem a expansão acelerada sem necessidade de energia escura, apresentam estabilidade e reproduzem muito bem todas as eras cosmológicas (Amarzguioui et al. 2006, Fay et al. 2007, Santos et al. 2008, Carvalho et al. 2008, Campista et al. 2011).

Estrutura da tese. Nesta tese, nós investigaremos as consequências cosmológicas de três formas funcionais $f(R)$ no formalismo de Palatini e apresentaremos os resultados a respeito da viabilidade observacional destas teorias $f(R)$ neste formalismo. As formas funcionais investigadas são (como são conhecidas na literatura): função exponencial, função de Hu–Sawicki e função lei-de-potência. Nossa metodologia consiste na comparação observacional destes modelos[‡] com os resultados das observações cosmológicas mais recentes envolvendo a relação magnitude–*redshift* de SNs Ia, estimativas da taxa de expansão cósmica $H(z)$, fração de gás em aglomerados de galáxias e medições do produto da escala acústica da CMB ℓ_A com a posição do pico das oscilações acústicas bariônicas (BAO), daqui em diante denominada “razão CMB/BAO”. Para cada modelo testado, nós realizaremos uma análise de χ^2 , derivaremos os vínculos teóricos sobre os parâmetros de cada modelo e determinaremos o espaço de parâmetros permitido pelas observações atuais. Nossos resultados mostram que, com exceção do modelo exponencial, os modelos investigados no formalismo de Palatini são indistinguíveis do modelo Λ CDM, pelo menos no nível do *background*[§]. Diferentemente de resultados anteriores encontrados com o formalismo métrico, nós mostraremos que estes cenários podem reproduzir a sequência padrão das eras cosmológicas, mesmo sem a inclusão de uma constante cosmológica, o que é exigido no modelo Λ CDM. Para o modelo exponencial mostramos ainda a possibili-

[‡] Nesta tese, um *modelo* é definido pela união de uma forma funcional $f(R)$ e o formalismo variacional adotado.

[§] Isto é, sem considerar os efeitos das perturbações cosmológicas.

dade de uma aceleração transitória, o que está de acordo com alguns requerimentos da teoria de cordas (Fischler et al. 2001).

Além deste, mais sete capítulos formam o corpo principal desta tese. Iniciaremos a primeira parte do texto com uma breve revisão de alguns conceitos teóricos e observacionais que constituem a base do Modelo Cosmológico Padrão, mostrando como o MCP está totalmente fundamentado na Relatividade Geral. No capítulo 3, discutiremos o problema da aceleração cósmica e introduziremos algumas alternativas à RG e ao MCP. No capítulo 4 revisaremos os fundamentos, alguns aspectos observacionais e as principais motivações por trás das teorias $f(R)$, discutindo as características mais relevantes dos formalismos métrico e de Palatini, além das divergências entre ambos. A contribuição original desta tese será apresentada em sua segunda parte, mais especificamente nos capítulos 5, 6 e 7. Neles apresentaremos e discutiremos as consequências cosmológicas de três formas funcionais $f(R)$ no formalismo de Palatini, a saber: o modelo exponencial, o de Hu–Sawicki e modelo lei-de-potência. Veremos que nossos resultados demonstraram a viabilidade dessas teorias quando se considera a história da expansão cósmica. Completaremos a leitura base desta tese apresentando, no oitavo e último capítulo, as principais conclusões dos nossos trabalhos e as perspectivas sobre novos resultados. Finalmente, apresentaremos de maneira breve nos apêndices A e B algumas quantidades observacionais e as ferramentas estatísticas utilizadas em nossos trabalhos, respectivamente.

Parte I.

CONCEITOS TEÓRICOS

2 Relatividade Geral e o Modelo Cosmológico Padrão

Resumo: *Uma revisão dos principais conceitos da Relatividade Geral é brevemente apresentada. Os pilares que constituem o Modelo Cosmológico e algumas de suas consequências são discutidas.*

Existem alguns requerimentos mínimos que qualquer teoria relativística de gravidade deve satisfazer. Entre eles, ela deve reproduzir a dinâmica Newtoniana no limite de campo fraco, de modo a explicar os resultados das observações astronômicas locais. Ela deve, por exemplo, descrever as órbitas dos planetas e o potencial de estruturas gravitacionalmente ligadas. Ela deve também passar nos bem estabelecidos testes do Sistema Solar (Will 1993); reproduzir a dinâmica galáctica, incluindo nessa dinâmica, os componentes observados (como as estrelas, planetas, poeira e gás), a radiação e o potencial Newtoniano, uma vez que ele é extrapolado para escalas galácticas; descrever a estrutura de grande escala (aglomerados de galáxias, por exemplo), além de descrever também a dinâmica cosmológica, reproduzindo, de uma maneira consistente, os parâmetros cosmológicos como, por exemplo, a taxa de expansão, a constante de Hubble e os parâmetros de densidade.

A Relatividade Geral é a teoria mais simples que tenta satisfazer os requerimentos citados acima. Ela se baseia na suposição de que o espaço e o tempo não mais representam entidades absolutas mas sim, devem ser unidos em uma única estrutura, o *espaço-tempo*. A RG nos diz que, ao contrário de outros campos na natureza (campos eletromagnéticos, por exemplo) a gravidade é a manifestação da curvatura do espaço-tempo. No limite em que não existem forças gravitacionais, o espaço-tempo da RG deve reproduzir a estrutura de espaço-tempo de Minkowski.

Embora tenha elaborado rapidamente as bases físicas que tornariam possível a RG, Einstein ainda não dispunha de uma representação matemática plausível para suas ideias. Isto só foi possível após ele ter feito uso das ideias apresentadas por Riemann, que definiu que o Universo deve possuir um espaço-tempo curvo (não-euclidiano), no qual a distribuição de matéria deve

influenciar localmente a curvatura da estrutura do espaço-tempo. Esta curvatura tem que ser estabelecida através das observações astronômicas (Eisenhart 1997). Uma outra propriedade do espaço-tempo da RG é que ele é Lorentziano, ou seja, sua métrica possui sinais mistos, algo que foi herdado da Relatividade Especial.

A RG é fortemente baseada em quatro suposições que qualquer teoria de gravitação tem que satisfazer. São elas: O *princípio da relatividade*, que requer que todos os referenciais sejam equivalentes do ponto de vista físico, de tal maneira que nenhum referencial deve ser preferido em relação a todos os outros, seja ele inercial, ou não; o *princípio da equivalência*, que requer que os efeitos inerciais sejam localmente indistinguíveis dos efeitos gravitacionais (isto leva à equivalência entre as massas inerciais e gravitacionais); o *princípio da covariância*, que requer que as leis da física devam ter a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas; e o *princípio da causalidade*, que exige que cada ponto do espaço-tempo deve admitir uma noção universalmente válida do passado, presente e futuro.

2.1. Ferramentas da Relatividade Geral

Existem diversas quantidades físicas e ferramentas matemáticas que precisamos conhecer para realizarmos os cálculos necessários tanto em Relatividade Geral como em qualquer teoria de gravitação. A mais fundamental dessas quantidades é a métrica $g_{\mu\nu}$, que é um tensor simétrico e tem um papel fundamental tanto em RG quanto em cosmologia. Ela é um tensor não-degenerado, ou seja, $g \equiv \det(g_{\mu\nu}) \neq 0$. Com isso, podemos definir a métrica inversa como

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta_{\alpha}^{\mu}, \quad (2.1)$$

onde a simetria de $g_{\mu\nu}$ ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) implica na simetria de $g^{\mu\nu}$. Einstein postulou que as forças gravitacionais devem ser descritas pela curvatura que o campo do tensor métrico gera em uma variedade espaço-temporal quadridimensional. Na RG, a métrica possui uma assinatura Lorentziana e, daqui em diante, será assumida como sendo $(-, +, +, +)$.

A métrica $g_{\mu\nu}$ possui diversas características importantes. Ela realiza na RG o mesmo papel do potencial gravitacional Φ na gravitação Newtoniana. Ela também nos fornece, uma noção de “passado” e “futuro”, além de nos permitir calcular o tempo próprio e o intervalo de espaço-tempo entre dois eventos (Carroll 2004). Uma outra característica importante da métrica é que ela pode ser utilizada para abaixar e levantar índices. A partir da métrica, nós podemos definir o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.2)$$

onde dx^{μ} é um deslocamento infinitesimal na direção de x^{μ} .

Uma das ferramentas mais utilizadas sempre que cálculos em RG são realizados são os chamados *símbolos de Christoffel*, definidos em função da métrica como

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\nu,\mu} + g_{\mu\beta,\nu} - g_{\mu\nu,\beta}), \quad (2.3)$$

onde $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ são as conexões de Levi-Civita para a métrica $g_{\mu\nu}$ e os símbolos “,” representam as derivadas parciais com relação à componente em questão ($_{,\mu} \equiv \partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$)*. Uma vez que uma

* Nesta tese iremos, possivelmente, alternar entre estas notações.

métrica $g_{\mu\nu}$ é dada, sua curvatura é expressa pelo *tensor de Riemann* (ou tensor de curvatura)

$$R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}, \quad (2.4)$$

onde sua contração

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \quad (2.5)$$

é o *tensor de Ricci*. O traço da Eq. (2.5) fornece o *escalar de Ricci*

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

que é a última quantidade necessária para podermos construir o *tensor de Einstein*

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

2.2. As equações de campo da Relatividade Geral

Na RG, a curvatura do espaço-tempo é determinada localmente pela distribuição de matéria e energia, onde esta distribuição é dada pela *tensor energia-momento* $T_{\mu\nu}$. Para um fluido perfeito o tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

onde p e ρ são a pressão e a densidade de energia do fluido, respectivamente, e u_{μ} é a quadrive-locidade de um observador comóvel com o fluido, definida por

$$u_{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{\sqrt{-ds^2}}, \quad (2.9)$$

onde $u^{\mu}u_{\mu} = -1$. Em forma matricial, podemos escrever este tensor energia-momento como

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

cujo traço é

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -\rho + 3p. \quad (2.11)$$

Com o objetivo de obter as equações de campo para sua nova teoria, Einstein utilizou uma analogia com a equação de Poisson, uma vez que esta descreve o potencial gravitacional Newtoniano. Ele então postulou as seguintes equações de campo para a dinâmica das forças gravitacionais

$$R_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}T_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

onde $\kappa \equiv 8\pi G$ é a constante de acoplamento. Como mostrado por Hilbert, essas equações não tinha uma origem variacional, uma vez que, segundo ele, não havia uma Lagrangiana que a reproduzisse. Para Hilbert, elas se mostraram insatisfatórias do ponto de vista físico e matemático.

Mais tarde, Einstein retrucou, dizendo saber deste problema, pois elas não satisfaziam a equação de continuidade de qualquer tipo conhecido de matéria. Para esclarecer melhor, considere que a matéria pode ser descrita como um fluido perfeito, ou seja, com o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ dado pela Eq. (2.8). Então a equação de continuidade requer que $T_{\mu\nu}$ seja covariantemente constante, ou seja, que satisfaça a lei de conservação

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (2.13)$$

onde ∇^μ é a derivada covariante com relação à métrica. A inconsistência com a Eq. (2.12) surge por que, a menos que $R = 0$, temos $\nabla^\mu R_{\mu\nu} \neq 0$ (Capozziello & Francaviglia 2008).

Einstein e Hilbert concluíram, de maneira independente, que as equações de campo (2.12) deveriam ser substituídas pelas equações corretas

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é atualmente chamado de *tensor de Einstein* de $g_{\mu\nu}$. Estas equações possuem origem variacional e satisfazem as leis de conservação (2.13). Isto se deve ao fato de $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, que segue das chamadas *identidades de Bianchi*:

$$R_{\sigma\mu\alpha\beta;\nu} + R_{\sigma\mu\nu\alpha;\beta} + R_{\sigma\mu\beta\nu;\alpha} = 0. \quad (2.15)$$

Podemos notar aqui que, embora possível, não é estritamente necessário a obtenção das equações de campo da RG a partir de uma formulação Lagrangiana (ou variacional). É importante esclarecer no entanto que, uma vez que esta formulação é a base por trás das teorias $f(R)$, é de nosso interesse demonstrar, no próximo capítulo, como podemos chegar a estas equações a partir de uma ação.

2.3. O formalismo Lagrangiano da Relatividade Geral

Uma vez que a RG assume que o único campo que media as interações gravitacionais é a métrica, e que qualquer outro campo está associado aos campos de matéria, podemos dividir a Lagrangiana da RG em uma soma de uma “Lagrangiana da matéria” \mathcal{L}_m , cuja derivada variacional fornece $T_{\mu\nu}$, ou seja,

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta [\sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi)]}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.16)$$

onde g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$ e ψ refere-se coletivamente aos campos de matéria, e uma “Lagrangiana gravitacional”, ou *Lagrangiana de Einstein–Hilbert*,

$$\mathcal{L}_{\text{EH}} = \frac{R}{2\kappa}. \quad (2.17)$$

Podemos então formar a seguinte ação

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \sqrt{-g} [\mathcal{L}_{\text{EH}} + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi)] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi) \\ &= S_{\text{EH}} + S_m, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde o primeiro termo do lado direito é comumente chamado de *ação de Einstein–Hilbert* e já foi definido pela Eq. (1.1).

A utilização da formulação Lagrangiana na obtenção das equações de campo tem um papel de extrema importância no desenvolvimento de teorias alternativas de gravidade. Podemos citar dois aspectos vantajosos desta escolha. Uma das vantagens é uma maior facilidade na comparação de teorias alternativas de gravidade por meio de uma ação, ao invés da análise direta das equações de campo. Um outro ponto a favor é um melhor entendimento físico quando teorias alternativas de gravidade são descritas por meio de uma ação (termos cinéticos, dinâmicos e acoplamentos). Deixaremos os detalhes envolvendo modelos alternativos de gravidade para o próximo capítulo. Na próxima seção, discutiremos as consequências da aplicação da RG no contexto cosmológico e como as observações contribuíram para o seu sucesso.

2.4. O Modelo Cosmológico Padrão

Na cosmologia moderna, as questões que representam nosso melhor entendimento dos dados observacionais formam o que chamamos hoje de *Modelo Cosmológico Padrão*. Este modelo é baseado na suposição de que as interações gravitacionais que dominam o Universo em grande escala são regidas pelas equações de campo da RG. Mas a base fundamental deste modelo é formada por dois princípios: o *princípio cosmológico* e o *postulado de Weyl*. De acordo com o princípio cosmológico, a distribuição de matéria no Universo é homogênea e isotrópica em grandes escalas de distância. Neste sentido, “grandes escalas” deve ser entendido como “células” com diâmetro maior que cerca de 100 Mpc, tamanho suficiente para incluir muitos aglomerados de galáxias. O postulado de Weyl introduz a ideia de que o conteúdo que permeia o Universo pode ser descrito como um fluido tipo-perfeito, uma vez que seus constituintes (galáxias) possam ser consideradas como “partículas” neste fluido. O Modelo Cosmológico Padrão é formado pelo conjunto de teorias que, como consequência destas suposições, formam um consenso entre a comunidade atual. Esta seção apresenta os principais ingredientes que constituem o MCP, além de mostrar as bases observacionais e teóricas que o suportam.

2.4.1. Bases observacionais

O crescente avanço das observações astrofísicas nos últimos anos permitiu o surgimento de algumas questões de muito interesse sobre as características do nosso Universo. As principais são: a existência da matéria escura e energia escura; a necessidade de entender a evolução das perturbações de densidade no Universo primordial; e a inflação, o possível mecanismo físico gerador destas perturbações. É consenso, no entanto, que as respostas para estes problemas atuais terão que estar de acordo com os chamados pilares do Modelo Cosmológico Padrão, os quais descreveremos a seguir.

A expansão do Universo. Atualmente, a expansão do Universo é um fato bem estabelecido. Até o início do século XX, com a crença de que o Universo seguia um modelo estacionário, a expectativa geral era de que fossem encontradas evidências de que as galáxias apresentassem

um movimento aleatório. No entanto, algumas observações já indicavam que a maioria das galáxias apresentam um desvio para o vermelho (*redshift*) em suas linhas espectrais, embora algumas galáxias próximas de nós apresentem um desvio para o azul (*blueshift*). De fato, a nebulosa M31 (Andrômeda) está se aproximando de nossa galáxia, o que é indicado pelo seu *blueshift*. As primeiras evidências observacionais da expansão foram apresentadas por Slipher (1912), sendo definitivamente descoberta por Hubble (1929). Hubble analisou o espectro de algumas galáxias espirais com suas distâncias razoavelmente conhecidas. Ele apontou uma forte evidência para uma relação aproximadamente linear entre as velocidades de recessão destas galáxias e a distância r até nós ($v \propto r$). Hoje escrevemos esta relação na forma

$$v = H(t)r. \quad (2.19)$$

O parâmetro $H(t)$ é o chamado *parâmetro de Hubble* e seu valor atual $H_0 = H(t_0)$ é conhecido como *constante de Hubble*. A equação acima representa a *lei de Hubble* e sua validade já foi comprovada através de observações de milhares de galáxias relativamente próximas.

A lei de Hubble indica que o Universo está se expandindo, e esta expansão é comumente chamada de *fluxo de Hubble*. É natural pensarmos que, se é observado que as galáxias estão se afastando de nós, isto poderia significar que estamos localizados no centro do Universo. No entanto, considerando a suposição de que o Universo é homogêneo e isotrópico, é necessário que exista um fator de expansão comum para as distâncias entre pares de galáxias. Assim, se um observador em uma galáxia A vê o Universo se expandindo com um *fator de escala* $a(t)$, qualquer outro observador em uma galáxia B verá esta expansão com o mesmo fator. Em outras palavras, o Universo não possui um centro geométrico. Em termos do fator de escala, o parâmetro de Hubble é definido como

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.20)$$

onde um ponto “.” representa a derivada com relação à t . Uma outra forma de expressar a lei de Hubble é escrevê-la em termos do *redshift* observado z , definido por

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (2.21)$$

onde λ_o e λ_e são os comprimentos de onda observado e emitido por uma fonte luminosa, respectivamente. Para objetos com velocidades muito menores do que a velocidade da luz c , o efeito Doppler nos dá $\lambda_o \simeq (1 + v/c)\lambda_e$. Logo, para baixas velocidades ($v \ll c$) e baixos valores de z ($z \ll 1$) temos

$$z \simeq \frac{v}{c}. \quad (2.22)$$

Substituindo o valor de v da equação acima na Eq. (2.19) temos

$$r \simeq \frac{c}{H_0}z, \quad (2.23)$$

onde a introdução de H_0 se justifica por estarmos considerando o universo próximo. Vemos então que, para $z \ll 1$, a lei de Hubble se traduz em uma relação linear da distância com o *redshift*.

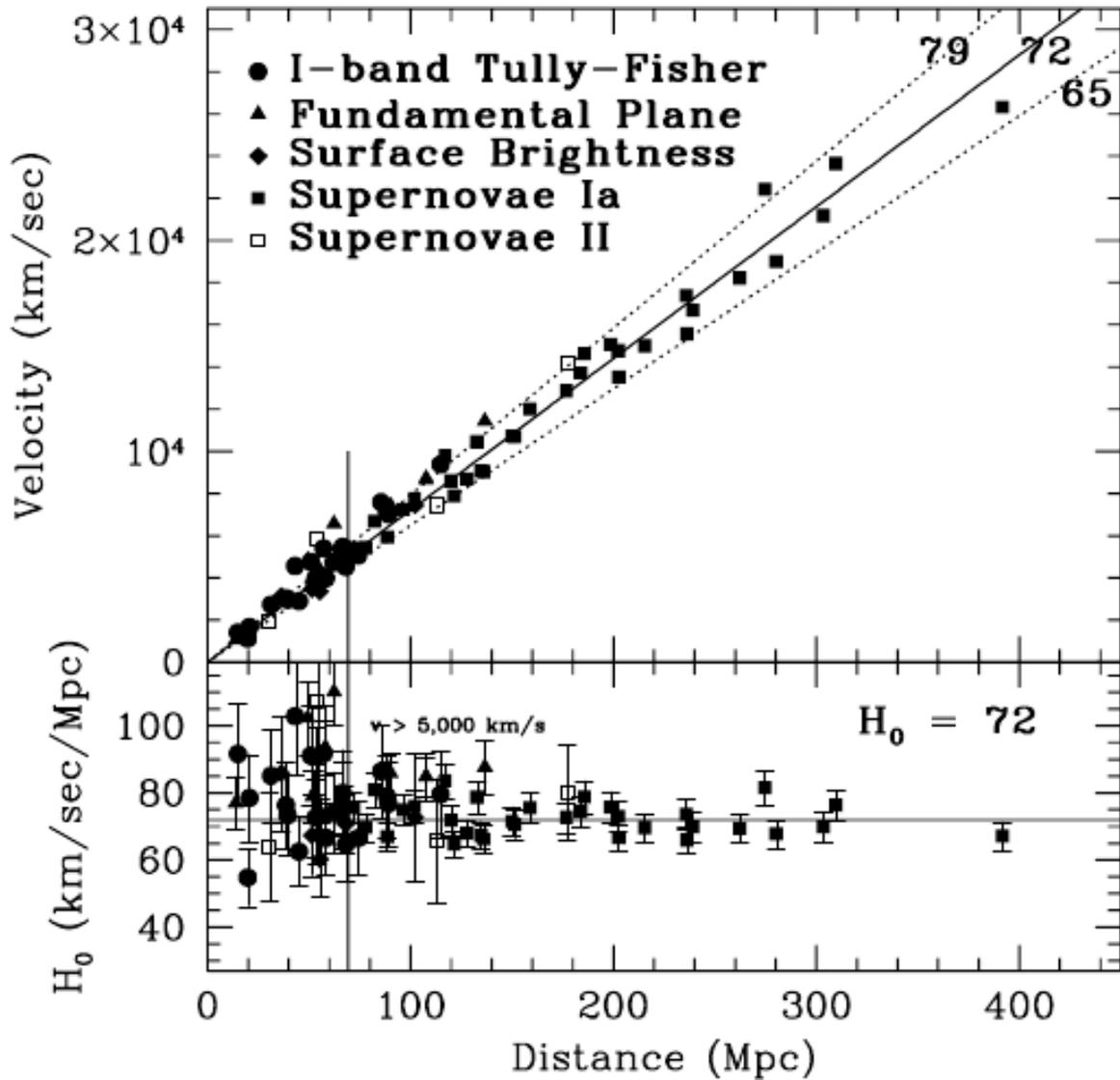


Figura 2.1.: Resultado final do HST para a constante de Hubble (Freedman et al. 2001). A incerteza em H_0 é de $\pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

O fator de escala $a(t)$ descreve como as distâncias em um universo homogêneo e isotrópico se expandem ou se contraem com o tempo, afetando assim, todas as distâncias cósmicas. Como consequência disso, λ_o e λ_e são relacionados por (Weinberg 1972)

$$\frac{\lambda_o}{a_0} = \frac{\lambda_e}{a(t)}, \quad (2.24)$$

onde $a_0 = a(t = t_0)$ representa o valor atual do fator de escala. Deste modo, podemos relacionar o *redshift* e o fator de escala reescrevendo a Eq. (2.21) como

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)}. \quad (2.25)$$

Daqui em diante assumiremos $a_0 = 1$, de modo que a relação fator de escala–*redshift* será dada por $a = (1 + z)^{-1}$.

Podemos ver através da Eq. (2.19) que $H(t)$ tem dimensão de inverso de tempo. Com isso, este parâmetro pode ser utilizado para definir uma escala de tempo para a expansão do Universo. É comum expressar a constante de Hubble como $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, onde h é uma

quantidade adimensional. Atualmente o valor de h não é conhecido com precisão. Apenas recentemente, com o avanço tecnológico dos instrumentos utilizados em astronomia, têm-se obtido melhores estimativas para este valor. Uma notável contribuição para nosso conhecimento sobre valor de H_0 se deve ao *Hubble Space Telescope (HST) Key Project* (Freedman et al. 2001). O objetivo principal deste projeto foi determinar o valor de H_0 utilizando cefeidas em galáxias espirais próximas. O valor medido pelo HST para h foi de 0.72 ± 0.08 . Resultados mais recentes apontam para um valor de 0.738 ± 0.024 (Riess et al. 2011). A Fig. 2.1 mostra os resultados do HST, onde se observa uma certa consistência entre os indicadores de distância utilizados nas análises.

A nucleossíntese primordial. Os elementos leves que observamos hoje (D, ^3He , ^4He e ^7Li) foram formados nos primeiros 3 minutos do Universo, quando este era constituído por um plasma fortemente ionizado. Os elementos mais pesados foram sintetizados mais tarde pelas estrelas e ejetados ao espaço através de processos astrofísicos como, por exemplo, supernovas. Até 1 segundo após o *Big Bang*, o equilíbrio entre elétrons, pósitrons, neutrinos, fótons, prótons e nêutrons era mantido através das reações fracas e nucleares. A temperatura do Universo neste instante era de aproximadamente 10^{10} K ($kT \sim 1$ MeV). A partir daí, as reações fracas deixaram de predominar e teve início a nucleossíntese primordial, que não depende das propriedades do Universo antes do primeiro segundo, devido a situação de equilíbrio anterior a este estágio. O processo de produção dos elementos leves ocorre durante cerca de 3 min após o *Big Bang*, quando o Universo atinge uma temperatura da ordem de 10^9 K ($kT \sim 100$ KeV).

A nucleossíntese estelar, através do processo de fusão nuclear, dificulta as observações das abundâncias dos elementos leves produzidos na nucleossíntese primordial. Portanto, para verificar as previsões da nucleossíntese primordial ocorrida nos primeiros minutos do Universo, devemos observar regiões pobres em metais, onde os efeitos da nucleossíntese estelar (destruição de deutério e ^7Li e síntese de ^4He) são minimizados. Peebles (1966) foi o primeiro a calcular quantitativamente as abundâncias de deutério, ^3He e ^4He . A abundância observada de ^4He , da ordem de 24%, é superior a duas vezes o que pode ser sintetizado no interior das estrelas. Esta abundância observada é em si uma forte evidência em favor de uma nucleossíntese primordial.

De acordo com o Modelo Cosmológico Padrão, as abundâncias primordiais de núcleos leves dependem apenas de um parâmetro, a razão entre o número de bárions e fótons, $\eta \equiv n_b/n_\gamma$. Como a densidade numérica de fótons é bem determinada, estas observações nos dão a densidade de bárions no Universo. As abundâncias primordiais previstas para todos os quatro elementos leves estão de acordo com as abundâncias observadas para valores de η em torno de $2 - 6 \times 10^{-10}$ (Copi et al. 1995). A concordância entre a nucleossíntese primordial e as observações é um dos maiores argumentos a favor da teoria do *Big Bang*.

A radiação cósmica de fundo. Quando tentamos observar o passado, surge um instante limite a partir do qual é impossível realizarmos qualquer tipo de observação. Neste instante ocorre o desacoplamento dos fótons que permeiam o Universo opaco e, a partir daí, o Universo torna-se transparente. A tabela (2.1) nos mostra uma descrição cronológica dos principais eventos que ocorreram no Universo desde a nucleossíntese primordial.

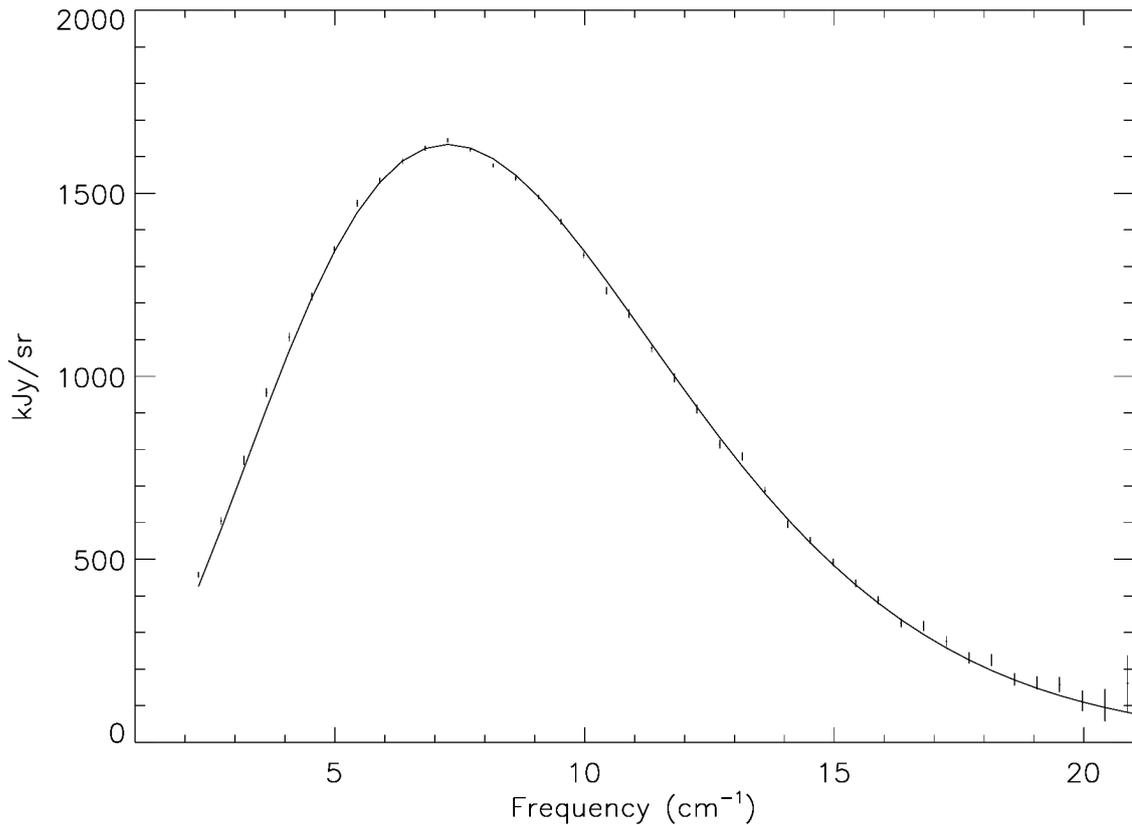


Figura 2.2.: Ajuste de um espectro de corpo negro da CMB com dados COBE/FIRAS (Fixsen et al. 1996).

Utilizando o Modelo Cosmológico Padrão, Gamow (1948) foi o primeiro a prever que o Universo deveria estar permeado por uma radiação de corpo negro, com um brilho dado pela lei de Planck:

$$B_\nu(T) = \frac{2h}{c} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (2.26)$$

Em 1965, Penzias e Wilson (Penzias & Wilson 1965) publicaram a descoberta da radiação cósmica de fundo (CMB) na faixa de 4080 Mhz, e a interpretação desta descoberta foi publicada no mesmo ano por Dicke, Peebles, Roll e Wilkinson (Dicke et al. 1965). A temperatura medida foi de $3,5 \pm 1,0$ K. O espectro da CMB é consistente com o de um corpo negro (ver Fig. 2.2) e o valor de sua temperatura, obtido pelo FIRAS (*Far Infrared Absolute Spectrophotometer*) e pelo satélite COBE (*COsmic Background Explorer*) é de $2,725 \pm 0,002$ K (Mather et al. 1999).

A radiação cósmica de fundo é extremamente isotrópica em praticamente todas as escalas angulares. No entanto, ainda é possível notar algumas anisotropias, que podem ser observadas se forem subtraídas as contribuições do dipolo cinemático, da temperatura média da CMB e da Via-Láctea. Elas foram detectadas pela primeira vez pelo satélite COBE (Smoot et al. 1992). A partir do início deste século, mapas de maior resolução dessas flutuações foram obtidos a partir de experimentos de alta precisão como o BOOMERanG (de Bernardis et al. 2000) e o MAX-IMA (Balbi et al. 2000), pelo satélite WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) (Spergel et al. 2003) e, mais recentemente, pelo satélite Planck, da ESA (*European Space Agency*) (ver Fig. 2.3).

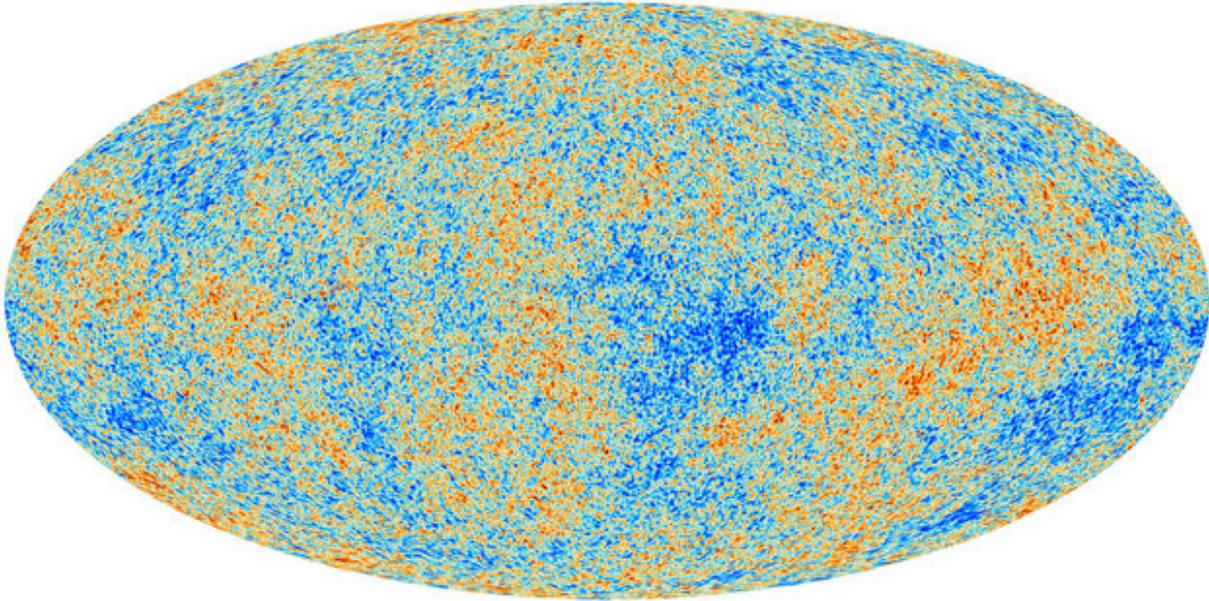


Figura 2.3.: Mapa das flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo obtido pelo satélite Planck. Fonte: (http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Planck).

Tabela 2.1.: História térmica do Universo baseada no modelo Λ CDM (dados retirados de Neto (2012)).

Evento	Idade	z	T (K)	kT
Hoje	$13,7 \times 10^9 h_{70}^{-1}$ anos	0	2,725	$2,35 \times 10^{-4}$ eV
Equipartição energ. esc.–matéria	$9,95 \times 10^9 h_{70}^{-1}$ anos	0,326	3,61	$3,1 \times 10^{-4}$ eV
Fim da reionização	$\sim 0,92 \times 10^9 h_{70}^{-1}$ anos	~ 6	~ 19	$1,6 \times 10^{-3}$ eV
Início da reionização	$\sim 0,18 \times 10^9 h_{70}^{-1}$ anos	~ 20	~ 57	$4,9 \times 10^{-3}$ eV
Desacoplamento dos fótons	$0,4 \times 10^6 h_{70}^{-1}$ anos	1100	3000	0,26 eV
Recombinação	$2,7 \times 10^5 h^{-1}$ anos	1400	3800	0,33 eV
Equipartição matéria–radiação	$58 \times 10^3 h^{-1}$ anos	$3400 h_{70}^2$	$9200 h_{70}^2$	$0,8 h_{70}^2$ eV
Nucleossíntese	1 – 500 s	$0,25 - 5,5 \times 10^9$	$0,7 - 15 \times 10^9$	0,06 – 1,3 MeV

A medida fundamental em estudos da CMB é a temperatura T da radiação de fundo em uma dada direção sobre o céu. O procedimento usual para se quantificar teoricamente as anisotropias da CMB consiste em expandir a distribuição de T sobre toda a esfera celeste como uma soma sobre harmônicos esféricos[†]

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - \tilde{T}}{\tilde{T}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (2.27)$$

onde θ e ϕ são os ângulos esféricos usuais e os coeficientes $a_{\ell m}$ especificam o tamanho das flutuações em diferentes escalas e são assumidos como sendo estatisticamente independentes. Sabe-se hoje que as flutuações descritas pela Eq. (2.27) são da ordem de 10^{-5} K (Smoot et al. 1992).

O requerimento que as propriedades estatísticas sejam independentes da escolha da origem

[†] Amendola & Tsujikawa (2010) apresentam uma derivação mais completa para as perturbações sobre T .

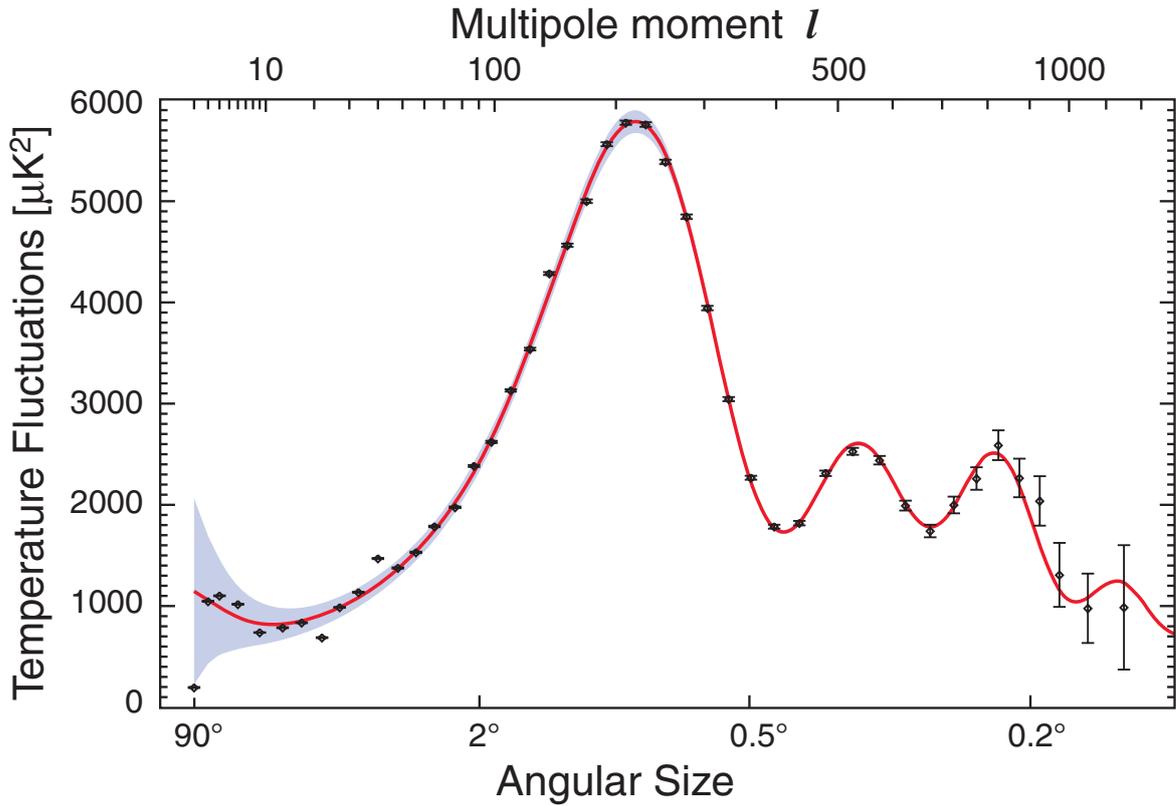


Figura 2.4.: Espectro de potência da CMB em função do momento ℓ e da escala angular $\theta = \pi/\ell$. A curva sólida representa a previsão teórica do modelo Λ CDM (ver seção 3.3.1), enquanto que os pontos escuros correspondem aos dados do 7º ano de resultados do WMAP. Fonte: WMAP (<http://wmap.gsfc.nasa.gov>).

das coordenadas θ e ϕ (invariância rotacional) significa que o resultado não pode depender da escolha do índice m , tal que o espectro de potência angular C_ℓ da radiação depende apenas de ℓ . O índice ℓ nos fornece uma escala angular, com pequenos valores de ℓ correspondendo a grandes escalas angulares e maiores valores de ℓ correspondendo a escalas angulares menores. O termo $\ell = 1$ corresponde ao termo de dipolo que é entendido como sendo devido ao movimento da Terra com relação à CMB, via efeito Doppler. Este termo nada nos diz sobre as propriedades intrínsecas da CMB, tanto que, frequentemente, mapas da CMB são mostrados com o termo de dipolo já tendo sido removido. São os modos restantes, a partir do termo de quadrupolo ($\ell = 2$), que são atribuídos às flutuações na distribuição de matéria na época do desacoplamento.

De modo a compararmos as observações com a teoria, estamos interessados apenas nas propriedades estatísticas dos coeficientes $a_{\ell m}$, quantificados pelo espectro de potência angular da radiação, conhecido pela notação C_ℓ e definido por

$$C_\ell \equiv \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle, \quad (2.28)$$

que pode ser entendido como uma média sobre todos os possíveis observadores no Universo.

A Fig. 2.4 mostra as flutuações teóricas $\ell(\ell + 1)C_\ell/2\pi$ em função de ℓ , juntamente com os resultados do 7º ano do WMAP (Komatsu et al. 2011). Grandes escalas correspondem a pequenos valores de ℓ pela relação $\theta = \pi/\ell = 180^\circ/\ell$. O padrão quantitativo dos picos e vales

no espectro de potência não muda de maneira significativa com modelo cosmológico adotado, no entanto, sua estrutura detalhada sim. Medições suficientemente precisas dessas estruturas podem, portanto, descartar ou favorecer modelos cosmológicos. Atualmente, a modelagem do espectro de potência da CMB tem se tornado acessível à comunidade através de ferramentas computacionais como, por exemplo, o CMBFAST[‡] e o CAMB[§].

Flutuações de $\sim 10'$ nos mapas da CMB correspondem a massas de $\sim 2,0 - 2,5 \times 10^{14} M_{\odot}$ na chamada *superfície de último espalhamento*, que corresponde ao momento em que o Universo se torna transparente (Neto 2012). Esta escala de massa corresponde aos aglomerados galácticos e, portanto, é provável que flutuações da CMB desta magnitude correspondam aos “embriões” de aglomerados semelhantes aos observados no universo próximo. Como vemos, a radiação cósmica de fundo fornece a maior evidência de que o Universo foi denso e quente em seu início, tal como previsto pelo Modelo Cosmológico Padrão, motivo pelo qual este modelo também é chamado por *Hot Big Bang*.

2.4.2. Princípio cosmológico e a métrica de Robertson–Walker

Como vimos na seção 2.4.1, as observações realizadas por Hubble trouxeram à época uma nova visão sobre a dinâmica cósmica através da descoberta da expansão. No entanto, os resultados de suas observações foram mais além. Suas observações sobre a distribuição espacial das galáxias analisadas também confirmaram as previsões do *princípio cosmológico* que, como vimos, estabelece que todas as posições no Universo são essencialmente equivalentes.

A teoria da Relatividade Especial nos diz que juntos, espaço e tempo formam um espaço-tempo quadridimensional. Assim, nós podemos calcular a distância quadridimensional entre dois eventos no espaço-tempo. Se um evento ocorre nas coordenadas (t, r, θ, ϕ) e outro ocorre em $(t + dt, dr + r, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$, então, segundo as leis da RE, a separação no espaço-tempo entre estes dois eventos será dada por

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.29)$$

onde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2. \quad (2.30)$$

A métrica dada na Eq. (2.29) é chamada de *métrica de Minkowski* e o espaço-tempo que ela descreve é conhecido como espaço-tempo de Minkowski, em homenagem a H. Minkowski, que propôs esta métrica pouco tempo após Einstein ter introduzido a Relatividade Especial (Minkowski 1907).

Na década de 1930, os físicos Howard Robertson e Arthur Walker derivaram, independentemente, aquela que é chamada de *métrica de Robertson–Walker* (ou métrica RW), com seu elemento de linha comumente escrito na forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.31)$$

[‡] CMBFAST: http://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_cmbfast_ov.cfm.

[§] CAMB: http://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_camb_ov.cfm.

onde $a(t)$ é o fator de escala da expansão cósmica, k representa a curvatura da porção espacial do espaço-tempo, e $d\Omega$ é dado pela Eq. (2.30). O tempo t na métrica de Robertson–Walker é o tempo próprio cosmológico, ou *tempo cósmico*, e é o tempo medido por um observador que vê o Universo se expandindo uniformemente ao redor dele. As variáveis espaciais r , θ e ϕ são chamadas de *coordenadas comóveis* de um ponto no espaço; se a expansão do Universo é perfeitamente homogênea e isotrópica, então as coordenadas comóveis de qualquer ponto permanecem constantes com o tempo. Pode-se mostrar que a métrica (2.31) é a única métrica compatível com a lei de Hubble e com o princípio cosmológico (homogeneidade e isotropia do Universo) (Weinberg 1972).

Se o Universo é perfeitamente homogêneo e isotrópico, então tudo o que precisamos saber sobre a sua geometria está contido nas variáveis $a(t)$ e k . O fator de escala $a(t)$ é uma função adimensional que descreve como as distâncias crescem ou diminuem com o tempo e é normalizado de modo que, no presente, temos $a_0 = 1$. A constante de curvatura k é um número adimensional que pode assumir um dos três valores distintos: $k = 0$ se o universo é espacialmente euclidiano (universo plano); $k = -1$ se o universo possui uma geometria hiperbólica (universo aberto); e $k = +1$ se o universo possui uma geometria esférica (universo fechado). Muito da cosmologia moderna é dedicada, de uma forma ou de outra, a encontrar valores para $a(t)$ e k .

A métrica (2.31) é uma aproximação que se mantém adequada apenas em grandes escalas. As observações revelam que, em escalas menores, o Universo é “irregular”, e portanto, não se expande de maneira uniforme. Isto ocorre, por exemplo, em sistemas gravitacionalmente ligados, tais como sistemas planetários (como o próprio Sistema Solar), galáxias e aglomerados de galáxias (como o Grupo Local em que vivemos). Apenas em escalas maiores que ~ 100 Mpc a expansão do Universo pode ser tratada como a expansão ideal, homogênea e isotrópica, descrita por um único fator de escala $a(t)$.

2.4.3. Distâncias cosmológicas

Existem diversas maneiras de especificar a distância entre dois pontos no espaço cósmico. No entanto, é importante ressaltar que, devido à expansão do Universo, a realização de cálculos e medições de distâncias em cosmologia é comumente um processo bastante complicado. Antes de tratarmos da dinâmica cósmica e de alguns parâmetros cosmológicos, é importante introduzirmos as distâncias cósmicas diretamente relacionadas com a métrica (2.31). Existem basicamente duas maneiras de se medir distâncias no Universo, a distância comóvel que permanece fixa com a expansão cósmica e a distância física que cresce devido à expansão. A medida de distância fundamental, da qual todas as outras podem ser derivadas é a distância comóvel. Exemplos de outras medidas são a distância diâmetro angular e a distância luminosidade.

No que se segue, iremos assumir que as distâncias entre todos os eventos considerados são grandes o suficiente para ignorarmos perturbações de pequena escala e adotarmos a métrica (2.31). Também iremos explicitar o uso da velocidade da luz c em todas as expressões pertinentes. Feito isto, iremos reescrever a componente espacial da Eq. (2.31) na forma

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + f_k^2(\chi)d\Omega^2, \quad (2.32)$$

onde

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \sinh(\chi) & \text{para } k = -1 \\ \chi & \text{para } k = 0 \\ \sin(\chi) & \text{para } k = +1 \end{cases} . \quad (2.33)$$

A função $f_k(\chi)$ também pode ser escrita de uma maneira unificada na forma

$$f_k(\chi) = \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k} \chi), \quad (2.34)$$

onde vemos que o caso plano é recuperado no limite $k \rightarrow 0$.

Distância comóvel. Em um universo em expansão a distância física (ou distância própria) d_p de um observador (na origem) até um certo objeto é dada por $d_p = a(t)d_C$, onde d_C é a chamada *distância comóvel*. Uma pequena distância comóvel δd_C entre dois objetos próximos é definida como a distância que permanece constante com o tempo se os dois objetos se movem devido à expansão. Neste caso, a distância comóvel total d_C de nós até um objeto distante é calculada através da integração das contribuições infinitesimais δd_C ao longo da direção radial, ou linha-de-visada, desde $z = 0$ até o objeto.

Vamos considerar um fóton que viaja ao longo da direção χ . Seu movimento satisfaz a equação da geodésica nula, ou seja

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\chi^2 = 0. \quad (2.35)$$

Com isto, para este fóton temos

$$d\chi = -\frac{cdt}{a(t)}, \quad (2.36)$$

onde o sinal (-) foi escolhido uma vez que, quando o tempo t cresce, a variável χ diminui e vice-versa. Considere que este fóton, que foi emitido no instante $t = t_1$ com $\chi = \chi_1$, e num dado *redshift* z , alcança um observador no instante $t = t_0$ com $\chi = 0$, correspondendo a $z = 0$. Então, integrando a Eq. (2.36) temos

$$d_C \equiv \chi_1 = \int_0^{\chi_1} d\chi = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{c}{a(t)} dt. \quad (2.37)$$

Das Eqs. (2.20) e (2.25) temos que $dt = -dz/H(1+z)$. Logo, a distância comóvel será dada por

$$d_C = \frac{c}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (2.38)$$

onde

$$E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_0}. \quad (2.39)$$

Para simplificar as expressões daqui em diante, vamos introduzir a quantidade $I(z)$, definida por

$$I(z) \equiv \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}. \quad (2.40)$$

Desta forma, a distância comóvel também pode ser expressa pela relação

$$d_C = \frac{c}{a_0 H_0} I(z). \quad (2.41)$$

Na expressão acima, podemos expandir $I(z)$ em torno de $z = 0$ até o termo segunda ordem e mostrar que, no Universo próximo ($z \ll 1$), a distância comóvel é dada aproximadamente por

$$d_C \simeq \frac{c}{a_0 H_0} z. \quad (2.42)$$

Uma consequência interessante desta aproximação é que, com o uso da relação (2.22), nós encontramos

$$v \simeq (a_0 H_0) d_C = H_0 r \quad (z \ll 1). \quad (2.43)$$

onde $r = a_0 d_C$ é a distância física até um determinado objeto. Vemos, portanto, que a lei de Hubble é válida no regime de baixos *redshifts*. Para valores maiores de z , no entanto, temos que considerar os termos de ordem mais alta na expansão de $I(z)$, tal que a lei de Hubble neste regime precisa ser modificada.

De certo modo, a distância comóvel é considerada como a medida de distância fundamental na cosmologia, uma vez que todas as outras podem ser derivadas em termos dela.

Distância luminosidade. A *distância luminosidade* d_L desempenha um importante papel na realização de certos testes cosmológicos, principalmente os que envolvem observações de SNs Ia. Ela é definida através da comparação entre a luminosidade absoluta L de uma fonte distante com o fluxo de energia detectado localmente F . Esta medida de distância é frequentemente utilizada em observações de supernovas tipo Ia, de forma que sua obtenção fornece uma importante conexão entre a luminosidade das supernovas distantes e a taxa de expansão do Universo. No que se segue, os índices “e” e “o” representarão os valores emitidos e observados das quantidades de interesse. Desta forma, considere uma fonte luminosa emitindo isotropicamente em todas as direções. A distância luminosidade, neste caso, é definida por

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L_e}{4\pi F}}, \quad (2.44)$$

onde L_e é a luminosidade absoluta bolométrica (isto é, integrada sobre todas as frequências) emitida pela fonte luminosa e o fluxo F é a potência por unidade de área medida pelo observador e é definido por $F = L_o/A$, onde $A = 4\pi[a_0 f_k(\chi)]^2$ é a área de uma esfera em $z = 0$ e concêntrica com a fonte[¶]. Com isto, a Eq. (2.44) torna-se

$$d_L = a_0 f_k(\chi) \sqrt{\frac{L_e}{L_o}}. \quad (2.45)$$

Considere agora que a fonte luminosa emite uma quantidade de energia ΔE_1 durante o intervalo de tempo Δt_1 , e que o observador detecta uma quantidade de energia ΔE_o no intervalo

[¶] No caso de uma geometria não-euclidiana, sendo R o raio da esfera, sua área não é simplesmente $4\pi R^2$ e deve ser obtida a partir do elemento de linha, que no modelo cosmológico padrão, é dado pela métrica FLRW (2.31). Isto nos dá $A = 4\pi a^2(t) d_C^2$, que será menor que $4\pi R^2$ se $k = 1$, ou maior se $k = -1$.

de tempo Δt_0 . A luminosidade emitida pela fonte será dada por $L_e = \Delta E_1 / \Delta t_1$. Similarmente, para o observador temos $L_o = \Delta E_o / \Delta t_o$. Uma vez que a energia de cada fóton é inversamente proporcional ao seu comprimento de onda λ , temos que

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta E_o} = \frac{Nh\nu_1}{Nh\nu_o} = \frac{\lambda_o}{\lambda_1} = 1 + z, \quad (2.46)$$

onde utilizamos a relação (2.21). Além disso, para cada fóton temos também $\Delta t_1 = \lambda_1 / c$ e $\Delta t_o = \lambda_o / c$. Logo,

$$\frac{\Delta t_o}{\Delta t_1} = \frac{\lambda_o}{\lambda_1} = 1 + z. \quad (2.47)$$

Portanto, a relação entre a luminosidade emitida e a observada será

$$\frac{L_e}{L_o} = \frac{\Delta E_1 \Delta t_o}{\Delta E_o \Delta t_1} = (1 + z)^2. \quad (2.48)$$

Vemos então, que a distância luminosidade da Eq. (2.45) pode ser escrita na forma

$$d_L = (1 + z)a_0 f_k(\chi). \quad (2.49)$$

Utilizando a Eq. (2.34) para a função $f_k(\chi)$ e lembrando que a distância comóvel é dada por $\chi = d_C = (c/a_0 H_0)I(z)$, temos que a distância luminosidade d_L pode ser escrita como

$$d_L(z) = \frac{c}{H_0} \frac{(1 + z)}{\sqrt{\Omega_{k0}}} \sinh\left(\sqrt{\Omega_{k0}} I(z)\right), \quad (2.50)$$

onde Ω_{k0} é dado pela Eq. (2.65) para o tempo presente (ver seção 2.4.4). Vemos então que a distância luminosidade está diretamente relacionada com a taxa de expansão do Universo. Além disso, pode-se mostrar que na região de pequenos *redshifts* ($z \ll 1$) nós temos $d_L \simeq cz / (a_0 H_0)$ (Amendola & Tsujikawa 2010), que é idêntico ao comportamento da distância comóvel neste regime de *redshifts*. Este fato tem como implicação direta a validade da lei de Hubble para a distância luminosidade no Universo local.

Distância diâmetro angular. Além da distância comóvel e da distância luminosidade, podemos definir ainda a *distância diâmetro angular* de um objeto de tamanho físico D (ortogonal à linha-de-visada) e observado sob um ângulo θ utilizando a relação usual da geometria Euclidiana

$$d_A \equiv \frac{D}{\text{sen}(\theta)} \simeq \frac{D}{\theta}, \quad (2.51)$$

onde a aproximação de pequenos ângulos na expressão final é válida na maioria dos contextos astronômicos.

Considere uma esfera de raio χ , concêntrica a um observador em $z = 0$. Utilizando o elemento de linha (2.31), o tamanho físico D no instante t é dado por

$$D = a(t) f_k(\chi) \theta. \quad (2.52)$$

Logo, utilizando a relação fator de escala-*redshift* (2.25) e o mesmo método aplicado entre as Eqs. (2.49) e (2.50), segue da definição (2.51) que a distância diâmetro angular é dada por

$$d_A = \frac{a(t) f_k(\chi) \theta}{\theta} = \frac{a_0 f_k(\chi)}{1 + z} = \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{k0}}} \frac{1}{1 + z} \sinh\left(\sqrt{\Omega_{k0}} I(z)\right). \quad (2.53)$$

Comparando-se as Eqs. (2.50) e (2.53), vemos que as distâncias d_L e d_A estão relacionadas por

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}, \quad (2.54)$$

que é a chamada *relação de dualidade* (ou relação de Etherington (Etherington 2007)) e é válida não só para a métrica FLRW, mas para qualquer métrica na qual o fluxo de fótons é conservado.

Uma característica particular da distância diâmetro angular é que seu valor não cresce monotonicamente com o *redshift* para um objeto de dimensão D . Por exemplo, para um universo de Einstein-de Sitter (universo contendo apenas matéria), a dimensão angular de um dado objeto será mínima em $z = 5/4$, onde a partir daí, o tamanho angular volta a crescer. Pensando em termos do tamanho angular θ , isto significa que objetos mais distantes parecem maiores em tamanho angular (para uma discussão mais completa, ver Lima & Alcaniz (2000) e referências lá contidas). Em altos *redshifts*, a distância diâmetro angular é tal que $1''$ (1 segundo de arco) é da ordem de 5 kpc (Hogg 1999).

2.4.4. Dinâmica da expansão e os parâmetros cosmológicos

Toda a dinâmica do universo no MCP é regida pelas equações de campo (2.14), que indicam a forma pela qual a matéria e a geometria do espaço-tempo se afetam mutuamente. Para o caso de um universo homogêneo e isotrópico, onde as geodésicas são obtidas a partir da Eq. (2.31), as Eqs. (2.14) se reduzem as soluções de Friedmann–Lemaître, dadas por

$$H^2(a) = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\kappa\rho}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (2.55)$$

$$H^2(a) = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\kappa p - 2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{k}{a^2}. \quad (2.56)$$

onde p é a pressão total (matéria e radiação) e ρ é a densidade média total de energia. Seguindo razões históricas, daqui em diante iremos nos referir ao elemento de linha (2.31) como elemento de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (ou FLRW). Utilizando as soluções de Friedmann–Lemaître acima, pode-se chegar a uma equação para a aceleração da expansão do universo:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p). \quad (2.57)$$

Podemos ver que, independentemente da curvatura, a expansão do universo é sempre desacelerada ($\ddot{a} < 0$) para um fluido com pressão positiva ($p > 0$), satisfazendo a chamada condição de energia forte (ver seção 3.1) (Hawking & Ellis 1973, Visser 1996, Carroll et al. 2003). Também a partir destas equações é possível obter a equação da conservação da energia:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.58)$$

Além do parâmetro de Hubble definido pela Eq. (2.20), podemos definir, a partir das equações de campo, os seguintes parâmetros cosmológicos:

$$\Omega_i \equiv \frac{\kappa\rho_i}{3H^2} \quad (\text{parâmetro de densidade}) \quad (2.59)$$

$$\Omega_k \equiv 1 - \sum_i \Omega_i \quad (\text{parâmetro de curvatura}) \quad (2.60)$$

$$q(a) \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (\text{parâmetro de desaceleração}) \quad (2.61)$$

Os parâmetros de densidade. Os parâmetros de densidade Ω_i referem-se aos constituintes materiais presentes no Universo. Ao longo deste texto, vamos considerar um universo composto basicamente por matéria (Ω_m), radiação (Ω_r) e uma possível componente exótica de energia (Ω_x) que acredita-se ser a responsável pela atual aceleração da expansão cósmica. Um índice “0” em cada parâmetro indica o seu valor atual (por exemplo, $\Omega_{m0} = \Omega_m(a_0)$). É uma prática comum omitir o uso de Ω_r para $z \lesssim 4$, uma vez que seu valor atual é bastante pequeno ($\Omega_{r0} \approx 10^{-5}$).

Também define-se a densidade crítica do universo (ρ_c) como sendo a densidade de energia necessária para o universo assumir uma geometria plana. Então, fazendo $k = 0$ na Eq. (2.55) obtemos

$$\rho_c = \frac{3H^2}{\kappa} \approx 1,88h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}. \quad (2.62)$$

De fato, análises das propriedades da CMB combinadas às medidas atuais da taxa de expansão cósmica, sugerem que o Universo possui uma geometria aproximadamente plana (de Bernardis et al. 2000) com $\Omega_{k0} = -0,014 \pm 0,017$ (Spergel et al. 2007), o que fornece uma densidade do Universo um pouco abaixo da densidade crítica, uma vez que $\rho = (1 + \Omega_k)\rho_c$.

Com esta definição de densidade crítica e a definição (2.59), podemos obter os parâmetros de densidade pela razão entre a densidade de uma determinada componente e a densidade crítica do universo:

$$\Omega_i(a) = \frac{\rho_i(a)}{\rho_c(a)}. \quad (2.63)$$

Podemos notar que a definição do parâmetro de curvatura (2.60) apresenta uma condição de normalização para os parâmetros de densidade. Dividindo a Eq. (2.55) por H^2 e utilizando a definição (2.59), podemos escrever esta condição na forma

$$1 - \sum_i \Omega_i = -\frac{k}{(aH)^2}, \quad (2.64)$$

ou seja,

$$\Omega_k = \frac{-k}{(aH)^2}. \quad (2.65)$$

Em termos do parâmetro de curvatura Ω_k temos

$$\sum_i \Omega_i > 1 \Rightarrow \Omega_k < 0 \quad (\text{universo fechado}), \quad (2.66)$$

$$\sum_i \Omega_i = 1 \Rightarrow \Omega_k = 0 \quad (\text{universo plano}), \quad (2.67)$$

$$\sum_i \Omega_i < 1 \Rightarrow \Omega_k > 0 \quad (\text{universo aberto}). \quad (2.68)$$

O parâmetro de desaceleração. O parâmetro de desaceleração definido em (2.61) desempenha um importante papel na investigação da história cósmica. É fato bem conhecido que não apenas o fator de escala $a(t)$ como também a taxa com que o Universo está se expandindo, dada pelo parâmetro de Hubble $\dot{a}(t)/a(t)$, está variando com o tempo. O parâmetro de desaceleração quantifica esta variação. Quanto maior o valor deste parâmetro, mais rápida é a desaceleração.

Por outro lado, valores negativos implicam em aceleração da expansão. Considere a seguinte expansão de Taylor do fator de escala em torno de $t = t_0$:

$$a(t) = a_0 + \dot{a}(t_0)[t - t_0] + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)[t - t_0]^2 + \dots \quad (2.69)$$

Dividindo por a_0 obtemos

$$\frac{a(t)}{a_0} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{q_0}{2}H_0^2(t - t_0)^2 + \dots, \quad (2.70)$$

que define o valor atual do parâmetro de desaceleração como

$$q_0 \equiv -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}. \quad (2.71)$$

Uma vez que escolhemos um instante arbitrário para a expansão em Taylor, podemos generalizar esta definição para qualquer tempo t , ou equivalentemente, qualquer fator de escala a , o que nos leva à definição (2.61).

Aplicando a relação

$$-(1+z)H\frac{d}{dz} = H\frac{d}{d\ln a} = \frac{d}{dt}, \quad (2.72)$$

que pode ser obtida das Eqs. (2.20) e (2.25), chegamos a uma forma mais utilizada para o parâmetro de desaceleração:

$$q = -1 - \frac{1}{H}\frac{dH}{d\ln a} = -1 + \frac{1+z}{H}\frac{dH}{dz}. \quad (2.73)$$

Note que, como a Eq. (2.73) foi obtida através apenas de uma expansão do fator de escala em série de Taylor, da definição do parâmetro de Hubble e da relação fator de escala-*redshift*, que são independentes do modelo gravitacional, ela pode ser utilizada não só no contexto da RG, como também com teorias de gravidade modificada. De fato, é esta expressão que utilizaremos em nossos testes de viabilidade da segunda parte desta tese.

Na RG, o parâmetro de desaceleração pode ser obtido em termos dos demais parâmetros cosmológicos com o uso da equação da aceleração (2.57) e da definição da densidade crítica (2.62). Deste modo, em um universo plano ($\Omega_{k0} = 0$) temos

$$q(a) = \frac{1}{2} \sum_i (\rho_i + 3p_i)\Omega_i, \quad (2.74)$$

onde a soma é comumente realizada em relação aos parâmetros de densidade Ω_m , Ω_r e Ω_x , ou seja,

$$q(a) = \frac{1}{2}\Omega_m + \Omega_r + \frac{(\rho_x + 3p_x)}{2}\Omega_x, \quad (2.75)$$

Esta expressão é útil quando desejamos investigar a evolução da expansão em termos dos constituintes básicos do Universo. Podemos ver, por exemplo, que em um universo plano dominado pela matéria ($\Omega_m \sim 1$, $p = 0$)^{||}, temos $q \sim 1/2$, enquanto que, quando apenas a radiação

^{||} Note a utilização do sinal “ \sim ” ao invés de “ $=$ ”. Lembre-se que em um universo totalmente plano, a densidade total é igual à densidade crítica ($\rho = \rho_c$). Logo, da Eq. (2.63) segue que $\Omega_m = 1$ implica em a densidade da matéria ser igual à densidade crítica e, conseqüentemente, à densidade total. Em outras palavras, a matéria seria não apenas a componente dominante, como também, a única do Universo e isto não é, definitivamente, o que queremos considerar aqui.

domina o cenário cósmico ($\Omega_r \sim 1$, $p = 1/3$), temos $q \sim 1$. Na verdade, um modelo contendo apenas radiação e matéria sempre resulta em um parâmetro de desaceleração positivo. Este resultado deriva da necessidade da gravidade ser uma força atrativa. Se observamos um valor para $q(t)$ negativo, estamos observando um período na história cósmica de expansão desacelerada.

O parâmetro da equação de estado. Utilizando os valores atuais destes parâmetros, a equação da conservação de energia (2.58) e considerando que cada componente material (matéria, radiação, ...) é descrita por uma equação de estado na forma $p = w\rho$, onde w é o chamado *parâmetro da equação de estado*, podemos reescrever a Eq. (2.55) na forma

$$H^2(a) = H_0^2 \left[\Omega_{k0} a^{-2} + \sum_i \Omega_{i0} \mathcal{X}_i(a) \right], \quad (2.76)$$

ou, equivalentemente (ver Eq. (2.39))

$$E^2(a) = \Omega_{k0} a^{-2} + \sum_i \Omega_{i0} \mathcal{X}_i(a). \quad (2.77)$$

O parâmetro $\mathcal{X}_i(a)$ representa a evolução das densidades de energia com o fator de escala e pode ser obtido resolvendo-se a equação da conservação da energia (2.58) para um $w = w(z)$ genérico, tendo como solução

$$\mathcal{X}_i(a) \equiv \frac{\rho_i(a)}{\rho_{i0}} = \exp \left\{ 3 \int_{\ln a}^0 [1 + w_i(a')] d \ln a' \right\}, \quad (2.78)$$

que para w constante fornece

$$\rho_i(a) = \rho_{i0} a^{-3(1+w_i)}. \quad (2.79)$$

Para a radiação, o valor do parâmetro da equação de estado é $w_r = 1/3$ ($p_r = \rho_r/3$), enquanto que para a matéria este valor é nulo, ou seja, $p_m = 0$. Podemos ter ainda o caso em que o universo possui uma componente de vácuo Λ , a constante cosmológica (ver seção 3.3.1), com equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, onde $w_\Lambda = -1$. Com isto, substituindo os valores de w para a radiação, matéria e constante cosmológica na Eq. (2.79), obtemos

$$\rho_r(a) = \rho_{r0} a^{-4}, \quad (2.80)$$

$$\rho_m(a) = \rho_{m0} a^{-3}, \quad (2.81)$$

$$\rho_\Lambda = \text{constante}. \quad (2.82)$$

História cósmica. Como a densidade da radiação cai mais rapidamente com o *redshift*, é de se esperar que em algum instante, a densidade da radiação se iguale a densidade da matéria. Antes deste momento o Universo era dominado pela radiação, *era da radiação*; após este instante, a situação se inverte e tem início a *era da matéria*. Comparando as Eqs. (2.80) e (2.81), podemos encontrar o valor do *redshift* no momento em que ocorre esta igualdade. Tal valor é

$$z_{\text{eq}} \approx 4 \times 10^4 \Omega_{m0} h^2, \quad (2.83)$$

e a temperatura da radiação nesta época é

$$T_{\text{eq}} = T_0(1 + z_{\text{eq}}) = 2,725(1 + z_{\text{eq}}) \approx 1,1 \times 10^5 \Omega_{m0} h^2 \text{ K}. \quad (2.84)$$

Até este momento, a radiação cósmica mantinha a matéria complemente ionizada devido ao espalhamento Compton entre os fótons da radiação e os elétrons. Ainda não era possível ter início a formação de estruturas, pois a interação eletromagnética repulsiva entre dois prótons (núcleos de H^+) tem uma intensidade muito superior a da interação gravitacional atrativa entre eles. No entanto, devido a expansão, o Universo se esfria e a um *redshift* $z_{\text{rec}} \approx 1100$ ($T \approx 3000$ K) ocorre o *desacoplamento dos fótons*, quando estes deixam de ser espalhados pelos elétrons, passando a se propagarem livremente, chegando até nós. Neste momento, o Universo se torna transparente e os elétrons livres são capturados por praticamente todo o hidrogênio ionizado, que se torna neutro. Chamamos esta época de *recombinação*. O intervalo de tempo durante a recombinação é da ordem de 10^5 anos, o que corresponde a um intervalo em *redshift* de $\Delta z \approx 100$ em torno de $z_{\text{rec}} = 1100$. É a partir daí que a formação das estruturas gravitacionalmente ligadas que observamos no Universo pode ter início.

Podemos notar a partir da Eq. (2.57) que uma componente que acelera a expansão cósmica deve possuir pressão negativa e satisfazer a condição $w < -1/3$. Consequentemente, vemos pela Eq. (2.79) que a densidade de energia desta componente diminui mais lentamente do que a da matéria. Esta componente poderia, portanto, dominar o Universo nos seus estágios mais recentes. Já vimos que para o caso $w = -1$, esta componente equivale à constante cosmológica Λ . Quando os valores de w residem no intervalo $-1 < w < -1/3$ esta componente é denominada *quintessência* e é associada a um campo escalar ϕ , com potencial escalar $V(\phi)$ (ver seção 3.3.3).

No estudo da dinâmica do universo é importante descrever a evolução temporal do fator de escala quando o universo é dominado por um fluido com equação de estado $p = w\rho$, e isto pode ser obtido a partir das Eqs. (2.76), (2.77) e (2.79), resultando em

$$\dot{a}(t) = \left[H_0^2 \Omega_0 a^{-(1+3w)} - k \right]^{1/2}. \quad (2.85)$$

Para o caso plano ($k = 0$) esta equação diferencial é facilmente resolvida, resultando em

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (2.86)$$

Podemos ver que quando o Universo é dominado pela radiação ($w = 1/3$), o fator de escala evolui com o tempo na forma $a(t) \propto t^{1/2}$, enquanto que, na era da matéria ($w = 0$) seu comportamento com o tempo é dado por $a(t) \propto t^{2/3}$. Lembre-se que a existência desta era é necessária para o processo de formação de estruturas no Universo.

Na segunda parte desta tese veremos que esta evolução para o caso da matéria desempenha um papel importante na atual discussão sobre a viabilidade das teorias $f(R)$ no formalismo de Palatini. No caso de uma constante cosmológica, a evolução temporal do fator de escala pode ser obtida substituindo $w = -1$ na Eq. (2.85), obtendo-se desta forma $a(t) \propto \exp(\sqrt{\Lambda/3}t)$.

2.5. Sumário

Este capítulo foi dedicado aos principais aspectos (teóricos e observacionais) da Relatividade Geral e do Modelo Cosmológico Padrão. Como mostramos, o MCP é satisfatório para grande parte dos resultados observacionais. A expansão observada do Universo é bem explicada uma

vez que sua dinâmica é governada pelas equações de campo de Einstein através da métrica FLRW, que é baseada na hipótese de homogeneidade e isotropia do Universo, um dos alicerces do MCP. As abundâncias atuais observadas dos elementos leves (D, He e Li) são previstas pelos resultados teóricos da nucleossíntese primordial. Finalmente, o espectro de corpo negro da CMB, com temperatura atual de $\sim 2,725$ K, também é previsto pelo MCP, bem como suas fontes de anisotropias. No entanto, apesar dos sucessos do MCP, é consenso que algumas questões observacionais e teóricas ainda não se encontram completamente explicadas, ou mesmo, são incompatíveis com o MCP. No contexto cosmológico, a principal destas questões refere-se a busca pela natureza do agente causador da aceleração cósmica. Reservamos as discussões sobre este problema ao próximo capítulo.

3 Além da Relatividade Geral: O problema da aceleração cósmica

Resumo: *O problema da aceleração cósmica é brevemente discutido. Os principais problemas teóricos e observacionais do MCP são apresentados, algumas alternativas à Relatividade Geral e ao MCP são introduzidas.*

3.1. As condições de energia

Em Relatividade Geral, a distribuição de energia-momento e qualquer tensão devido à matéria, ou a qualquer outro campo não-gravitacional, é descrito pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. No entanto, as equações de campo de Einstein não especificam quais tensores energia-momento são fisicamente significativos. Por este motivo, é importante analisar sob quês condições $T_{\mu\nu}$ pode representar fontes de matéria realistas. Estas condições, conhecidas como *condições de energia*, precisam ser gerais o suficiente para poderem satisfazer todos os tipos de campo (pelo menos em um nível clássico).

As condições de energia podem ser determinadas em relação a um sistema de coordenadas invariante em termos de $T_{\mu\nu}$ e campos de vetores de característica fixa (tipo-tempo, nulo ou tipo-espaço). Formalmente, elas são definidas por (Hawking & Ellis 1973):

- A condição de energia fraca (*weak energy conditions* – WEC). A WEC exige $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ para qualquer vetor tipo-tempo $t^\mu \in T_sM$. Por continuidade, esta condição também exige a validade da NEC.
- A condição de energia nula (*null energy conditions* – NEC). A NEC exige $T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \geq 0$ para o vetor nulo $n^\mu \in T_sM$, onde T_sM refere-se ao espaço tangente em uma variedade espaço-tempo quadridimensional M no ponto $s \in M$.

- A condição de energia forte (*strong energy conditions* – SEC). A SEC exige que, para qualquer vetor tipo-tempo, $(T_{\mu\nu} - T/2g_{\mu\nu})t^\mu t^\nu \geq 0$, onde T é o traço de $T_{\mu\nu}$.
- A condição de energia dominante (*dominant energy conditions* – DEC). A DEC é a exigência que $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ para qualquer vetor tipo-tempo $t^\mu \in T_sM$. A DEC também exige que $T_{\mu\nu}t^\mu$ não seja um vetor tipo-espaço. Por continuidade, a DEC também é válida para qualquer vetor nulo $n^\mu \in T_sM$.

Considerando o tensor energia-momento de um fluido perfeito dado pela Eq. (2.8), as condições anteriores se reduzem a (Hawking & Ellis 1973, Visser 1996, Carroll 2004)

$$\text{WEC: } \rho + p \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho \geq 0, \quad (3.1)$$

$$\text{NEC: } \rho + p \geq 0, \quad (3.2)$$

$$\text{SEC: } \rho + p \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho + 3p \geq 0, \quad (3.3)$$

$$\text{DEC: } \rho \geq |p| \quad \text{e} \quad \rho \geq 0. \quad (3.4)$$

Sob um ponto de vista mais físico, estas condições de energia podem ser entendidas do seguinte modo: A WEC surge do fato de que a matéria tem densidade de energia não-negativa. Em outras palavras, a WEC exprime o fato que um observador comóvel com um fluido de equação de estado $p = w\rho$ sempre irá medir uma densidade de energia $\rho \geq 0$. Quanto às pressões, a WEC permite que elas sejam negativas, mas exige o limite inferior $p \geq -\rho$. A NEC é um caso especial da WEC e corresponde a uma exigência mais fraca do que a anterior. Ela exige que a gravidade seja sempre atrativa. A violação da NEC implica em instabilidades sob pequenas perturbações numa ampla classe de modelos, incluindo teorias de calibre com qualquer tipo de fluido perfeito (Buniy & Hsu 2006). A SEC é derivada de princípios geométricos com a exigência adicional de uma gravidade atrativa. Ela é mais exigente que a NEC e uma violação desta última implica em uma violação da SEC. A DEC aparece da hipótese de que o fluxo de matéria e energia nunca se propagam mais rapidamente do que a luz. A DEC implica a WEC e, conseqüentemente, a NEC, mas não necessariamente a SEC. A NEC, DEC e SEC são suposições matematicamente independentes. Note que a violação da NEC implica na violação de todas as outras condições de energia, já a violação da WEC, não implica necessariamente a violação da NEC ou da SEC, mas leva a violação da DEC. Note também que se assumirmos que todas as formas de energia apresentam uma densidade de energia positiva $\rho > 0$, qualquer modelo cosmológico com $w < -1$ ($p < -\rho$) (superquintessência) viola todas as condições de energia.

3.2. O conteúdo cósmico

Diante das condições de energia expostas acima, é importante realizarmos uma análise de quais protagonistas poderiam fazer parte do cenário cosmológico como componentes realistas de matéria-energia. O avanço tecnológico dos últimos anos tornou possível a realização de observações mais precisas acerca das propriedades do Universo. Isto permitiu a obtenção de melhores informações a respeito de seus constituintes básicos. Atualmente, sabe-se que o Universo é composto de diversos tipos de componentes “materiais”. Naturalmente, o Universo é

constituído por matéria ordinária, os bárions, que contribuem com cerca de 4% da densidade crítica, de acordo com os resultados obtidos da nucleossíntese primordial. Sabe-se que há uma radiação cósmica de fundo em micro-ondas, emitida quando o Universo tinha apenas 300.000 anos e que carrega consigo um espectro de corpo negro com uma temperatura atual de $\approx 2,7$ K. Estudos das anisotropias da CMB fornecem valores para a densidade dos bárions similares aos fornecidos pela nucleossíntese primordial, porém com incertezas maiores. O Universo também é constituído por matéria relativística, os neutrinos cósmicos que, embora não sejam observados diretamente, algumas estimativas dão a densidade de energia combinada de fótons e neutrinos como sendo $\Omega_{\text{rel}}h^2 \simeq 4 \times 10^{-5}$.

Existem evidências que apoiam ainda a existência de uma componente exótica da matéria, a matéria escura. Há mais de 70 anos, Smith (Smith 1936) e Zwicky (Zwicky 1937) fizeram uma observação surpreendente: o movimento individual de galáxias em aglomerados é tão intenso que a atração gravitacional de todo o aglomerado de galáxias não é suficiente para segurá-lo. Nesse sentido, aglomerados de galáxias deveriam se dispersar, embora isso não ocorra. Isso sugere que uma componente desconhecida de matéria deve estar presente para manter o aglomerado coeso. Muitos trabalhos tem direcionado para esta conclusão; a dinâmica de galáxias individuais, galáxias duplas, grupos e aglomerados, todos apontam para esta inobservável mas unipresente componente de matéria (Roberts & Rots 1973, Rubin et al. 1978) que ficou conhecida por matéria escura. Sua luminosidade por unidade de massa deve ser consideravelmente inferior ao valor habitual na matéria estelar. Astrônomos sugeriram que tal matéria fria poderia estar, por exemplo, na forma de planetas tipo Júpiter, cometas, mini buracos negros, ou estrelas em seus estágios finais. Atualmente, sua assinatura é conhecida apenas pela interação gravitacional, mas estudos contínuos em toda a região do espectro eletromagnético ajudaria a delinear suas propriedades. A presença de tal matéria em quantidade suficiente para segurar os aglomerados poderia ser insuficiente para “fechar” o universo (para mais detalhes veja Rubin 1996). Atualmente, a teoria mais aceita a respeito de sua constituição é que ela seja formada por matéria não-bariônica e não-relativística. Modelos cosmológicos baseados sob esta hipótese são chamados de modelos CDM (do inglês “cold dark matter”). Contudo, sua constituição ainda é desconhecida e sua densidade atual incerta, acreditando-se que esteja em torno de $\Omega_{\text{me}} \simeq 0,3$ (Ade et al. 2013). Como a densidade de matéria escura Ω_{me} é muito maior que a densidade da matéria bariônica Ω_{b} , o parâmetro de densidade de matéria total Ω_{m} é amplamente utilizado para representar a densidade da matéria escura, no lugar de Ω_{me} .

Todos os componentes citados acima satisfazem as condições de energia mencionadas anteriormente. No entanto, uma característica importante das observações atuais implica em consequências interessantes sobre estas condições: note, a partir da Eq. (2.57), que para $\ddot{a} > 0$ temos $\rho + 3p < 0$. Em outras palavras, uma expansão acelerada do universo contraria frontalmente a SEC. Não obstante, diversas observações provenientes de diferentes fontes, como a CMB e SNs Ia, apontam para uma atual fase de aceleração da expansão do Universo (Copeland et al. 2006, Padmanabhan 2003, Peebles & Ratra 2003, Alcaniz 2006, Lima 2004) e uma das maneiras de explicar esta expansão acelerada é modificando a RG, incluindo uma componente de energia escura no tensor energia-momento das equações de Einstein (2.14).

Note ainda que esta aceleração atual não deve ter sido a única na história cósmica. Ela vem para ser adicionada a uma época acelerada inicial como prevista pelo paradigma inflacionário (Guth 1981, Linde 1990, Kolb & Turner 1990). A época inflacionária é necessária

para lidarmos com os chamados problemas de horizonte, planaridade e monoplares (Misner 1968, Weinberg 1972, Linde 1990, Kolb & Turner 1990), bem como para fornecer o mecanismo que gera as flutuações de densidade primordiais, atuando como sementes para a formação de estruturas de grande escala (Mukhanov 2003). Lembremo-nos também que, entre estes dois períodos de aceleração, deve haver um período de expansão desacelerada, de modo que as eras cosmológicas convencionais de dominação pela radiação e pela matéria podem acontecer. De fato, os limites observacionais sobre a abundância de elementos leves que vimos na seção 2.4.1 exigem que a nucleossíntese do *Big Bang* ocorra durante a era da radiação (Burles et al. 2001, Carroll & Kaplinghat 2002). Por outro lado, a era da matéria é necessária para a formação de estruturas ser realizada.

No contexto da aceleração recente, as observações atuais indicam que a densidade de energia desta componente, caso ela exista, domina o Universo atualmente, resultando aproximadamente no seguinte balanço: 4% de matéria bariônica ordinária, 20% matéria escura e 76% energia escura (Spergel et al. 2007, Riess et al. 2004, Astier et al. 2006, Eisenstein et al. 2005). Isto nos leva ao maior problema na cosmologia atual: conhecemos com razoável precisão a composição atual do Universo, mas a natureza de sua principal componente permanece obscura até o presente momento. Veremos nas próximas seções alguns candidatos que tentam descrever esta componente.

3.3. Modificando a Relatividade Geral: conteúdo material

Uma vez que já vimos, no início deste capítulo, as principais características da RG, iremos discutir agora como podemos modificá-la, afinal queremos explicar os efeitos observados que não são explicados por esta teoria. Observando as equações de Einstein (2.14) fica claro que modificações podem ser realizadas tanto no lado direito como no lado esquerdo das equações. Modificar o lado direito

$$G_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\text{mod}}), \quad (3.5)$$

é equivalente a adicionar alguma forma de “matéria” desconhecida à nossa teoria (mais comumente energia escura e matéria escura), que irá corrigir os resultados que a teoria nos fornece para coincidir com as observações. A seguir, listaremos os principais candidatos neste contexto.

3.3.1. A constante cosmológica

Uma vez que as equações de campo de Einstein (2.14) satisfazem as identidades de Bianchi (2.15) e que $\nabla_{\mu}\delta^{\mu}_{\nu} = 0$, um termo constante como $\Lambda g_{\mu\nu}$ pode ser adicionado a qualquer um dos lados destas equações, fornecendo interpretações diferentes dependendo do lado escolhido. Ao adicionarmos o termo Λ do lado esquerdo, estamos modificando nossa teoria de gravitação e este termo cosmológico é interpretado como uma constante fundamental da natureza, devendo seu valor ser determinado pelas observações. Por outro lado, quando adicionamos esta constante no lado direito estamos modificando o conteúdo material descrito pelo tensor energia-momento e o termo cosmológico é interpretado como sendo a contribuição das flutuações quânticas do vácuo (Weinberg 1989). No entanto, a contribuição da constante cosmológica para as equações de

campo de Einstein independe da forma como a mesma é interpretada. O modelo cosmológico que considera um universo plano e governado por matéria escura não-relativística mais uma constante cosmológica descrevendo o vácuo quântico é o chamado modelo Λ CDM. No contexto das teorias $f(R)$, este modelo é equivalente à uma função do tipo $f(R) = R - 2\Lambda$.

Para entender melhor como Λ explica o fenômeno da aceleração da expansão do Universo, vamos considerar a Eq. (2.57) com os termos de matéria e vácuo explicitados

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + \rho_{\text{vácuo}} + 3p_{\text{vácuo}}). \quad (3.6)$$

Se a constante cosmológica Λ é interpretada como sendo o vácuo, ela atua nas equações de campo com um tensor energia-momento da forma $T_{\mu\nu}^{\text{vácuo}} = \Lambda g_{\mu\nu}$ e equivale a um fluido perfeito com equação de estado $p_{\text{vácuo}} = -\rho_{\text{vácuo}}$. Note que substituindo esta equação de estado na Eq. (3.6), o sinal de \ddot{a} passa a ser positivo sempre que a condição $\rho_{\text{vácuo}} > \rho_m/2$ for satisfeita. Portanto, Λ pode dar origem a uma força gravitacional repulsiva que poderia ser responsável pela atual aceleração da expansão cósmica.

Embora o modelo Λ CDM represente atualmente nossa melhor descrição do Universo observado, em muito devido aos seus sucessos do ponto de vista observacional, existe pelo menos dois sérios problemas a serem considerados quando uma constante cosmológica não-nula é assumida. O primeiro problema consiste no fato de que determinações teóricas provenientes da teoria quântica de campos fornecem um valor para a densidade do vácuo de cerca de $\rho_{\text{vácuo}} \approx 10^{74} \text{ GeV}^4$, enquanto que, para a energia escura dominar a dinâmica do universo somente nos estágios atuais, um valor bem menor para sua densidade, $\rho_x \approx 10^{-47} \text{ GeV}^4$, é requerido pelas observações astronômicas. Como podemos ver, isto representa uma diferença de ~ 120 ordens de grandeza entre as determinações teóricas e observacionais. O segundo problema surge da tentativa de se resolver o primeiro: uma das alternativas a este problema da discrepância entre os valores teóricos e observacionais para a densidade de energia do vácuo é considerar uma constante cosmológica efetiva

$$\Lambda_{\text{ef}} = \Lambda + \kappa\rho_{\text{vácuo}}, \quad (3.7)$$

onde Λ é o termo proveniente da contribuição do campo gravitacional e $\kappa\rho_{\text{vácuo}}$ é a contribuição da densidade de energia do vácuo quântico. O argumento em favor desta tentativa é que o valor fornecido pelas observações se referem a um $\rho_{\Lambda_{\text{ef}}}$. No entanto, esta tentativa origina um complicado problema de “ajuste fino” entre os valores de Λ e $\rho_{\text{vácuo}}$ para que possamos obter o valor de $\rho_{\Lambda_{\text{ef}}}$ que observamos atualmente. Daqui em diante, sempre que mencionarmos a constante cosmológica Λ , estaremos nos referindo na verdade à constante cosmológica efetiva Λ_{ef} , mas abolindo o índice “ef” por conveniência.

Um outro problema bem conhecido que persegue o advento da constante cosmológica é o chamado problema da “coincidência cósmica”, que pode ser resumido na seguinte pergunta: uma vez que o período de tempo em que as densidades de energia da constante cosmológica e da matéria possuem a mesma ordem de grandeza é extremamente curto com relação à idade do Universo, por quê este período está acontecendo justamente hoje, quando estamos presentes para observá-lo?

A dificuldade em explicar estes problemas é conhecida como o *problema da constante cosmológica* e constitui um dos principais problemas da física teórica atual (Weinberg 1989, Sahni

& Starobinsky 2000, Carroll 2001). Esta situação tem levado alguns físicos a seguirem uma abordagem diferente, assumindo um cancelamento completo da constante cosmológica ($\Lambda = 0$) e que algum processo físico desconhecido é o responsável pela expansão acelerada. Diante disto, diversas alternativas ao modelo Λ CDM têm sido discutidas na literatura, algumas das quais listaremos a seguir.

3.3.2. Decaimento do vácuo

Uma alternativa fenomenológica de se resolver o problema do valor da constante cosmológica consiste em assumir que o termo cosmológico efetivo da Eq. (3.7) não é constante e que decresce ao longo da evolução do Universo, atingindo assim o seu valor atual. Os modelos que se baseiam neste princípio são chamados de *modelos com decaimento do vácuo* e têm sido investigados do ponto de vista observacional por diversos autores (ver, por exemplo, Alcaniz & Lima (2005), Borges & Carneiro (2005), Borges et al. (2008)). Esta classe de modelos constitui uma tentativa importante no sentido de resolver os problemas da constante cosmológica e energia escura. As equações de campo para esta classe de modelos são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} - \Lambda(t)g_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

Para que possamos agora obter a dinâmica do universo na presença de um termo cosmológico variável, devemos inicialmente observar que, como as identidades de Bianchi implicam numa divergência nula para o tensor de Einstein, a variação temporal do termo cosmológico deve resultar numa troca de energia entre o vácuo e a matéria e/ou radiação

$$u_{\mu}T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -u^{\mu}\frac{\Lambda_{;\mu}}{\kappa}, \quad (3.9)$$

dando origem a um processo de criação de matéria e/ou fótons, ou mesmo em um aumento da massa das partículas (Alcaniz & Lima 2005). Em outras palavras, isto equivale a dizer que a presença de um termo cosmológico variável implica num acoplamento entre $T_{\mu\nu}$ e Λ .

Uma crítica bastante comum a esta classe de modelos consiste na ausência de um guia prove-niente da física fundamental que indique uma lei de decaimento para $\Lambda(t)$. Neste sentido, diversos modelos de decaimento têm sido testados na literatura (ver tabela 3.1 de Costa (2007)). Uma característica observacional importante, que pode ser verificada experimentalmente (Alcaniz & Lima 2005) e que pode ter consequências interessantes na física da CMB é que, em uma classe de modelos cuja densidade da radiação é dada por $\rho_r = \rho_{r0}a^{-4+\alpha}$, a lei de temperatura da radiação é modificada em relação ao caso padrão $T(a) = T_0a^{-1}$, passando a ser dada por $T(a) = T_0a^{\alpha/4-1}$, onde o parâmetro α , que deve ser positivo, representa a taxa de produção de fótons.

3.3.3. Modelos ϕ CDM (campo escalar)

Uma outra alternativa para se descrever a energia escura que tem sido bastante discutida na literatura é a existência de um campo escalar primordial ϕ , homoganeamente distribuído ($\partial_i\phi = 0$),

minimamente acoplado com a gravidade e que evolui lentamente até o mínimo de seu potencial $V(\phi)$ (Ratra & Peebles 1988, Caldwell et al. 1998). Estes modelos são denominados de ϕ CDM e a energia escura descrita nesta classe de modelos é chamada de *quintessência*. Este campo escalar é descrito pela Lagrangiana

$$\mathcal{L}_\phi = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (3.10)$$

e o tensor energia-momento definido pela Eq. (2.16) é dado por

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right]. \quad (3.11)$$

A densidade de energia e a pressão relativa a este campo são escritas, respectivamente, por $\rho_\phi = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi)$ e $p_\phi = \dot{\phi}^2/2 - V(\phi)$, implicando numa equação de estado do tipo

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad (3.12)$$

que, em geral, varia ao longo da expansão do universo, mas está limitada ao intervalo $-1 \leq w \leq 1$. A aceleração da expansão pode surgir se a densidade de energia do campo escalar dominar o conteúdo energético do universo e o termo cinético do campo evoluir lentamente ($\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$), resultando em uma pressão negativa, exigência básica da RG para acelerar a expansão cósmica. Nestas condições, quando o campo chega ao seu mínimo de potencial, temos $\omega \sim -1$, e o campo ϕ passa a atuar de modo semelhantemente a uma constante cosmológica. É importante notar que, formalmente, no limite $\omega \sim -1$, quintessência e Λ são equivalentes. No entanto, fisicamente estas duas formas de energia são completamente distintas: enquanto a quintessência é uma componente dinâmica a densidade de energia do vácuo é constante e inerte.

Utilizando a Eq. (3.10) e a métrica FLRW, podemos obter a equação de movimento para o campo escalar através da equação de Klein–Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (3.13)$$

onde o símbolo (') indica derivadas com relação ao campo ϕ . Dado um $V(\phi)$, podemos resolver esta equação para obtermos ϕ e, conseqüentemente, w_ϕ pela Eq. (3.12). Várias parametrizações para $V(\phi)$ têm sido propostas na literatura, com algumas delas sendo capazes de explicar os dados atuais (ver tabela 2.1 de Barboza Jr. (2010) para uma lista das mais utilizadas na literatura). Evidências observacionais concretas a favor de uma equação de estado variável podem eliminar o principal candidato à energia escura, isto é, a constante cosmológica.

3.3.4. Modelos w CDM

Existe um bom motivo para considerar uma equação de estado constante para a energia escura. Os componentes conhecidos do Universo possuem uma equação de estado do tipo $w = \text{constante}$. Temos $w = 0$ para a matéria e $w = 1/3$ para a radiação, por exemplo. O mesmo acontece para

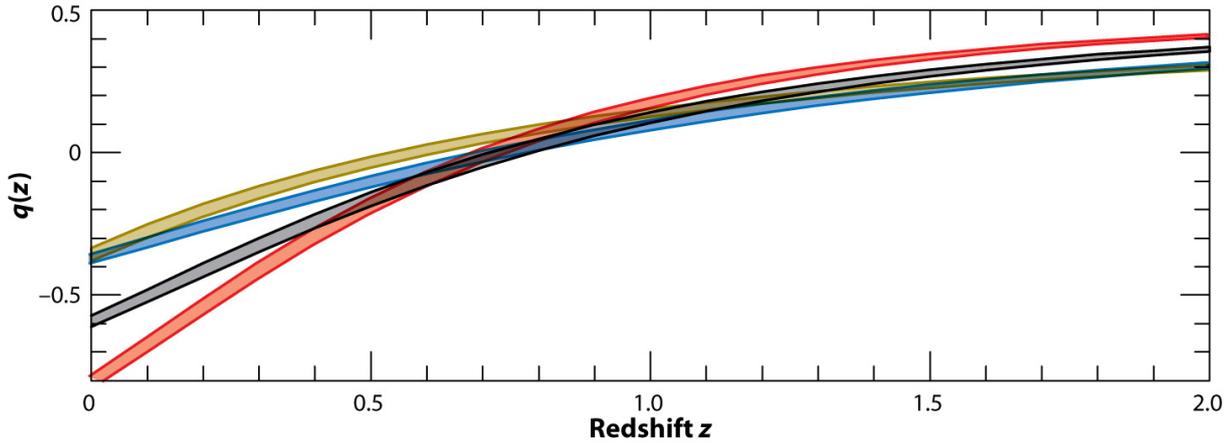


Figura 3.1.: Evolução do parâmetro de desaceleração $q(z)$ para alguns modelos de energia escura. As faixas em azul, cinza e vermelho correspondem aos modelos com parâmetro da equação de estado $w = -0,8$, -1 , e $-1,2$, respectivamente. A faixa marrom é para o modelo alternativo de gravidade DGP (ver seção 3.4.1). Todos os modelos assumem um universo plano e possuem a mesma densidade de matéria. A espessura das faixas indicam as incertezas que surgem da incerteza atual na densidade de matéria não-relativística Ω_{m0} . Retirado de Caldwell & Kamionkowski (2009).

componentes hipotéticos como defeitos topológicos, que obedecem uma equação de estado descrita por $w = -d/3$, onde d é a dimensão do defeito. Temos, por exemplo, $d = 1$ para *cordas cósmicas* ($w = -1/3$) e $d = 2$ para *paredes de domínio* ($w = -2/3$). Com esta motivação, como uma alternativa simples à constante cosmológica, podemos relaxar a condição $w = -1$ e assumir também os casos $w = \text{constante} \neq -1$ (Turner & White 1997, Chiba et al. 1997, Efstathiou 1999, Alcaniz & Lima 2001). Modelos deste tipo são chamados de w CDM. A evolução da densidade da energia escura nestes modelos é descrita pela Eq. (2.79). O intervalo de interesse para w situa-se entre 0 (matéria ordinária) e -1 (constante cosmológica). Componentes com $w > 0$ decrescem mais rapidamente do que a matéria ordinária e, portanto, causam uma desaceleração extra indesejada em comparação ao que é obtido dos resultados de SNs Ia. Uma propriedade interessante desses modelos é que para $w < -1$ a densidade de energia desta componente cresce com o tempo e o fator de escala torna-se infinito em um tempo finito, causando uma singularidade futura chamada *big rip*. Neste caso em particular, a energia escura é conhecida como *superquintessência*, ou ainda *energia fantasma*, e um dos motivos para tal denominação é que componentes com $w < -1$ podem ser consideradas não físicas pela condição de energia dominante (ver seção 3.1). No entanto, valores de $w < -1$ são, em muitos casos, preferidos do ponto de vista puramente observacional (Caldwell 2002, Caldwell et al. 2003, Carroll et al. 2003, Gonzalez-Diaz 2003, Alcaniz 2004).

Todas as consequências cosmológicas da energia escura com parâmetro da equação de estado constante surgem a partir do efeito desta componente sobre a taxa de expansão dada pelas Eqs. (2.76)–(2.78). No entanto, uma vez que as consequências observacionais dessa componente só são relevantes no intervalo $0 \leq z \lesssim 5$, uma aproximação comumente considerada é a de uma quintessência com equação de estado efetiva constante dentro deste intervalo, onde ela pode ser potencialmente observada. Isto decorre do fato de que é esperada pouca variação para o parâmetro w dentro desta faixa de *redshift*. Neste caso, podemos reescrever as Eqs. (2.76)–(2.78) utilizando a Eq. (2.79). A Fig. 3.1 mostra a evolução do parâmetro de desaceleração em

função do *redshift* para três casos de interesse com $w = \text{constante}$ (incluindo a constante cosmológica e energia fantasma), bem como para o modelo de gravidade modificada DGP, o qual discutiremos na próxima seção.

3.3.5. Gás de Chaplygin

Além dos modelos listados na seção 3.3, outra alternativa que merece menção é o chamado *gás de Chaplygin*. Neste modelo, supõe-se a existência de uma componente que se comporta inicialmente com pressão nula e posteriormente com pressão negativa, fazendo o papel tanto de energia escura quanto de matéria escura. Isto dá origem aos chamados modelos de *quartessência* (Kamenshchik et al. 2001, Bilic et al. 2002, Bento et al. 2002, Lima et al. 2008, 2009, Santos & Jesus 2008).

3.4. Modificando a Relatividade Geral: parte gravitacional

Alternativamente aos modelos de energia escura listados na seção anterior, nós podemos modificar o lado esquerdo das equações de campo de Einstein

$$c = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

que é o mesmo que reconsiderar o nosso conhecimento sobre a estrutura do espaço-tempo, sem adicionar componentes desconhecidas de energia ao nosso universo. Neste sentido, podemos destacar dois tipos de modificações: modificar a dimensionalidade do espaço-tempo ou incluir campos adicionais aos utilizados pela RG, sejam eles escalares, vetoriais ou tensoriais. Discutiremos os dois tipos, mas é no último que daremos mais atenção, pois é nele que se inserem as teorias $f(R)$.

3.4.1. Dimensões extras

A ideia de uma modificação na teoria de gravitação nos leva a uma questão relevante para a física fundamental e a cosmologia, e tão complexa quanto o ajuste do conteúdo energético do universo: dimensões extras. É bem conhecido que a existência de dimensões extras é necessária em algumas teorias alternativas ao modelo padrão da física de partículas como, por exemplo, teoria de cordas e teoria M. No contexto cosmológico, a existência de dimensões extras é bem traduzida nos chamados modelos de branas (Randall & Sundrum 1999a,b, Deffayet et al. 2002, Sahni & Shtanov 2000, 2003, Alcaniz 2002, Jain et al. 2002, Maia et al. 2005, Lue 2006, Dvali et al. 2000). Nos cenários de branas, nosso mundo quadridimensional constitui um sub-espaço de uma estrutura com mais dimensões. Em outras palavras, nosso Universo seria uma superfície ou uma membrana imersa numa dimensão extra. Todos os campos descritos pelo Modelo Padrão da física de partículas atuariam em nossa brana, sendo que somente a gravidade poderia se propagar na dimensão adicional. O interesse nestes cenários aumentou consideravelmente nos últimos anos e diversos modelos têm sido propostos neste contexto. Podemos citar, por

exemplo, o modelo DGP (Dvali–Gabadadze–Porrati) (Dvali et al. 2000), no qual a presença de uma dimensão espacial extra produz a seguinte modificação na equação de Friedmann:

$$H^2 = \left(\sqrt{\frac{\kappa\rho_m}{3} + \frac{1}{4r_c^2} + \frac{1}{2r_c}} \right)^2 - \frac{k}{a^2}, \quad (3.15)$$

onde r_c representa a escala de distância que delimita a atuação dos regimes de gravidade quadridimensional e pentadimensional. A lei usual do inverso do quadrado da distância ($1/r^2$) para a força gravitacional experimentada entre duas fontes pontuais só é obtida em escalas menores que r_c . Para escalas maiores que r_c , ocorre um “vazamento” da força gravitacional para a quinta dimensão, o que resulta numa modificação da lei da gravidade para $1/r^3$.

Alguns trabalhos têm sido realizados no sentido de investigar as consequências cosmológicas para esta classe de modelos descrita pela Eq. (3.15). Sollerman et al. (2009), por exemplo, investigaram a compatibilidade entre esta classe e as observações atuais, mostrando que eles podem fornecer uma explicação alternativa para a aceleração da expansão cósmica sem a necessidade de uma constante cosmológica ou de uma quintessência.

3.4.2. Teorias escalar-tensoriais

Teorias escalar-tensor têm sido intensamente investigadas como uma alternativa à Relatividade Geral. Elas constituem uma classe de teorias em que a gravidade é descrita não só pelo campo tensorial métrico de $g_{\mu\nu}$, mas também por um campo escalar, que é determinado pela distribuição de massa e energia no Universo e substitui a constante gravitacional G . Este campo escalar aparece acoplado ao escalar de Ricci R na forma $b(\phi)R$ (Fujii & Maeda 2003). Outras alternativas gravitacionais podem ser reformuladas como teorias escalar-tensoriais, tais como a teoria de Brans–Dicke e as teorias $f(R)$. Muito por causa disso, as teorias escalar-tensoriais representam talvez a classe mais estudada de teorias alternativas de gravidade e uma grande quantidade de testes experimentais dessas teorias têm sido realizados (Will 1993).

Nesta classe de teorias a ação da RG (2.18) é substituída pela ação (veja, por exemplo, Carroll (2004))

$$S_{\text{ET}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[b(\phi)R - \frac{1}{2}h(\phi)g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - U(\phi) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu},\psi) \right], \quad (3.16)$$

onde $\phi(\mathbf{x},t)$ é o campo escalar e $b(\phi)$, $h(\phi)$ e $U(\phi)$ são funções que determinam a forma da teoria. Note que o campo ϕ não está presente na Lagrangiana da matéria, ou seja, ele não está acoplado à matéria, apenas à gravidade.

Embora a ação (3.16) sugira que três funções ($b(\phi)$, $h(\phi)$, e $U(\phi)$) sejam necessárias para a teoria ser especificada, podemos redefinir a função b como sendo o novo campo e então obter as novas funções $U(b)$ e $h(b)$. A partir daí, a presença de um campo $b(\phi)$ que varia no espaço multiplicando a curvatura R na Eq. (3.16) implica que as teorias escalar-tensoriais são teorias de gravidade com uma constante de Newton que depende de $b(\phi)$. Portanto, essas teorias podem ser entendidas como modelos de gravidade com uma “constante” de Newton variável. Os outros termos na ação, contendo h e U , representam os termos de energia cinética e potencial para o novo campo, respectivamente.

A variação da ação com relação à métrica (ver próximo capítulo) nos leva às equações de campo (Caldwell & Kamionkowski 2009)

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{b(\phi)} \left[\frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(\phi)} + \nabla_\mu \nabla_\nu b - g_{\mu\nu} \square b \right], \quad (3.17)$$

onde $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$, ∇_μ é a derivada covariante associada com a conexão de Levi-Civita da métrica e

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = h(\phi)(\nabla_\mu \phi)(\nabla_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} h(\phi) g^{\rho\sigma} (\nabla_\rho \phi)(\nabla_\sigma \phi) + U(\phi) \right] \quad (3.18)$$

é o tensor energia-momento relacionado com o campo escalar ϕ , que possui equação de movimento

$$h \square \phi + \frac{1}{2} \frac{dh}{d\phi} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \phi)(\nabla_\nu \phi) - \frac{dU}{d\phi} + \frac{db}{d\phi} R = 0. \quad (3.19)$$

Nesta teoria, a equação de Friedmann em um universo FLRW plano é

$$H^2 = \frac{\rho}{6b} + \frac{h\dot{\phi}^2}{6b} - H \frac{\dot{b}}{b} + \frac{U}{6b}, \quad (3.20)$$

e a equação de movimento para o campo escalar torna-se,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \frac{3}{h} \frac{db}{d\phi} (\dot{H} + 2H^2) - \frac{\dot{\phi}^2}{2h} \frac{dh}{d\phi} - \frac{1}{2h} \frac{dU}{d\phi}. \quad (3.21)$$

Se por um lado a liberdade de escolha das funções $b(\phi)$, $h(\phi)$, e $U(\phi)$ traz a tona um grande número de casos fenomenológicos de interesse, por outro lado, esta própria característica dificulta a realização de afirmações gerais sobre a validade das teorias escalar-tensoriais. Soma-se a isto o fato de que quanto mais funções uma teoria possuir, mais condições iniciais para o novo grau de liberdade serão necessárias para se determinar a fenomenologia dessas teorias.

A despeito disto, essas teorias podem fornecer explicações à aceleração cósmica semelhantes às dos modelos de energia escura se algumas suposições sobre o campo escalar e suas funções forem introduzidas. Se, por exemplo, assumirmos que o campo ϕ evolui lentamente com o tempo, as derivadas temporais na equação (3.20) irão se tornar desprezíveis e, grosseiramente, poderemos ter um comportamento semelhante ao de uma quintessência. Incluindo os termos adicionais nas Eqs. (3.20) e (3.21) (os que dependem das derivadas de b e h), os detalhes entre teorias escalar-tensoriais e quintessência podem diferir, e uma gama mais ampla de comportamentos pode ser possível.

Teorias de Brans-Dicke. Formulada no início da década de 60 por Carl H. Brans e seu estudante Robert H. Dicke, a teoria de Brans-Dicke (BD) constitui o exemplo mais bem conhecido de teorias escalar-tensoriais (Brans & Dicke 1961). Comumente, essa teoria é definida por $b(\phi) = \phi/(2\kappa)$ e $h(\phi) = \omega_{\text{BD}}/(\kappa\phi)$, onde a constante ω_{BD} é o chamado *parâmetro de Brans-Dicke*. Quanto maior o valor deste parâmetro, menores serão os efeitos do campo escalar ϕ , de tal forma que, no limite $\omega_{\text{BD}} \rightarrow \infty$, esta teoria torna-se indistinguível da RG. A ação para a teoria BD é escrita na forma*

$$S_{\text{BD}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega_{\text{BD}}}{\phi} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - U(\phi) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi) \right], \quad (3.22)$$

* Na teoria original, o potencial do campo é nulo ($U(\phi) = 0$).

onde deixamos explícito o termo $16\pi G$ para discutirmos o seguinte fato: note que como uma teoria escalar-tensor, a teoria de Brans–Dicke pode ser considerada como uma teoria com um acoplamento gravitacional variável, já que podemos definir um acoplamento gravitacional efetivo

$$G_{\text{ef}} = \frac{G}{\phi}. \quad (3.23)$$

Isto está de acordo com o princípio de Mach (já mencionado no capítulo 1), no qual, segundo Dicke, “a constante gravitacional deve ser função da distribuição de massa no Universo” (Sotiriou & Faraoni 2010).

A teoria Brans–Dicke é de particular interesse em algumas situações físicas, uma vez que, nesses casos, a estrutura relativamente simples de suas equações de campo permitem soluções analíticas exatas. Além disso, ela também é frequentemente utilizada para modelar variações na constante de Newton G , bem como desvios da Relatividade Geral.

No regime de altas densidades, que são relevantes aos experimentos do Sistema Solar, a RG pode ser recuperada a partir da teoria BD através do chamado *mecanismo camaleão* (Khoury & Weltman 2004a,b), no qual a presença do potencial do campo escalar $U(\phi)$ possibilita a obtenção de uma massa efetiva do campo que depende da densidade. Neste mecanismo, o campo escalar é de curto alcance e sua massa se torna alta para densidades e curvaturas semelhantes as do Sistema Solar. Por outro lado, em densidades e escalas cosmológicas, o campo se torna de longo alcance e sua massa passa a ser pequena, de forma que ele pode causar a aceleração cósmica (Sotiriou & Faraoni 2010). Este mecanismo funciona não apenas na teoria BD (Khoury & Weltman 2004a,b, Tsujikawa et al. 2008), mas também em teorias $f(R)$ no formalismo métrico (Navarro & Van Acoleyen 2007, Faulkner et al. 2007, Hu & Sawicki 2007, Capozziello & Tsujikawa 2008, Brax et al. 2008, Thongkool et al. 2009), uma vez que, como veremos no próximo capítulo, elas podem ser consideradas como um caso especial da teoria BD com $\omega_{\text{BD}} = 0$ (O’ Hanlon 1972, Chiba 2003). Para modelos de energia escura viáveis baseados na teoria BD e em teorias $f(R)$ no formalismo métrico, a evolução cosmológica primordial é similar à da RG, mas o desvio da RG se torna relevante no universo tardio, ou seja, no regime de baixa densidade (Tsujikawa et al. 2008, Amendola et al. 2007a, Li & Barrow 2007, Amendola & Tsujikawa 2008, Starobinsky 2007, Appleby & Battye 2007, Linder 2009, Tsujikawa 2008).

Existe também uma outra forma de se recuperar a RG na teoria BD em regiões de alta densidade. Este método consiste em se introduzir na ação de Brans–Dicke auto-interações não lineares do campo escalar, por exemplo, na forma $\xi(\phi)\square\phi(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi)$, onde ξ é uma função em termos de ϕ (De Felice & Tsujikawa 2010b). Na teoria BD com este termo de auto-interação do campo $\xi(\phi)\square\phi(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi)$, o comportamento da RG é recuperado nas eras cosmológicas primordiais, durante as quais o campo permanece aproximadamente estático. Enquanto $\dot{\phi}/\phi$ é positivo, é possível evitar o aparecimento de instabilidades associadas com a velocidade de propagação do campo. Além disso, este modelo dá origem a algumas assinaturas observacionais interessantes, como o crescimento modificado das perturbações da matéria (Silva & Koyama 2009, Kobayashi et al. 2010).

Do ponto de vista observacional, a teoria de Brans–Dicke tem sido testada de maneira intensa em regimes de densidade similares aos do Sistema Solar. Como podemos notar, ela possui apenas um grau de liberdade a mais em comparação com a RG, ω_{BD} . Uma vantagem deste

fato é que este parâmetro serve para colocar a teoria em teste com as observações. A solução de suas equações de campo no Sistema Solar faz surgir um parâmetro pós-Newtoniano (PPN)[†] $\gamma = (\omega_{\text{BD}} + 1)/(\omega_{\text{BD}} + 2)$ e este parâmetro pode ser utilizado para se impor limites sobre ω_{BD} . A partir de experimentos de gravidade local do Sistema Solar, Bertotti et al. (2003) mediram este valor como sendo $\gamma = 1 + (2,1 \pm 2,3) \times 10^{-5}$, o que leva a um limite $\omega_{\text{BD}} \gtrsim 5 \times 10^4$ (Caldwell & Kamionkowski 2009). Sob este limite, o desvio da RG é muito pequeno para ser detectado pelas observações cosmológicas atuais.

3.4.3. Teorias $f(R)$

O problema da aceleração cósmica têm motivado diversos esforços na modificação da gravidade para se modelar esta aceleração sem a inclusão de partículas exóticas. Um dos modelos mais utilizados neste contexto são as teorias $f(R)$ onde, como já introduzimos no capítulo 1, realizamos a substituição $R \rightarrow f(R)$ na Lagrangiana gravitacional, o que faz com que a ação de Einstein–Hilbert possa ser transformada em uma variedade de formas diferentes. Este tipo de gravidade estendida tem tido um crescente aumento em aplicações à cosmologia (ver, por exemplo, Capozziello & De Laurentis (2011) para uma revisão sobre essas aplicações). Como mencionamos anteriormente e veremos mais adiante, as teorias $f(R)$ podem ser consideradas como uma classe de teorias de Brans–Dicke dependendo do formalismo variacional adotado. Uma vez que o foco principal desta tese são as teorias $f(R)$ e suas propriedades, nós iremos retornar a este tema no próximo capítulo.

3.5. Outras alternativas

Modelos não-homogêneos. Indo mais além, é importante enfatizar que todas as alternativas da seção 3.3 são modelos cosmológicos que utilizam a métrica FLRW uma vez que eles mantêm os princípios de homogeneidade e isotropia. No entanto, existem outras opções que utilizam as equações da RG e supõem um universo isotrópico, mas que consideram não-homogeneidades e que levam, portanto, a métricas distintas da FLRW. Nesta categoria, podemos citar os modelos Lemaître–Tolman–Bondi (Lemaître 1997, Tolman 1934, Celerier 2000, 2007, Buchert 2008), Szekeres (Szekeres 1975, Ishak et al. 2008) e Stephani (Stephani 1967a,b).

Modelos cinemáticos. Recentemente, têm havido uma intensa investigação por meio dos chamados *modelos cinemáticos* (Riess et al. 2004, Cunha 2009, Guimaraes et al. 2009, Santos et al. 2011). Esta classe de modelos visa determinar os parâmetros cinemáticos do universo, como a constante de Hubble, o parâmetro de desaceleração, o jerk e o snap, da forma mais independente de suposições sobre o conteúdo cósmico o quanto for possível. Desta forma, modelos cinemáticos podem ser vistos como medidas independentes dos parâmetros da expansão, e podem nos fornecer informações valiosas sobre o modelo cosmológico mais próximo da realidade.

[†] Do inglês “*parameterized-post-Newtonian*”. Este parâmetro nos dá uma medida de quanta curvatura espacial é produzida por unidade de massa de repouso. Para a RG temos $\gamma = 1$ (veja, por exemplo, Will (2001) para mais detalhes sobre os parâmetros PPN).

3.6. Sumário

Vimos neste capítulo que ainda não há uma definição clara de qual caminho deve ser seguido para se explicar o atual cenário cósmico de aceleração, que nos dias de hoje é um fenômeno amplamente aceito. Mostramos que algumas alternativas têm sido bastante investigadas com o intuito de se resolver este problema, sendo que as chamadas teorias $f(R)$ desempenham um importante papel neste contexto. O próximo capítulo é dedicado a esta classe de teorias, bem como suas principais propriedades/consequências físicas e cosmológicas.

4 Teorias $f(R)$

Resumo: *Uma breve revisão histórica e as principais motivações para o advento das teorias $f(R)$ são apresentadas. As consequências e as questões referentes a essas teorias são introduzidas no contexto cosmológico e os aspectos mais gerais dos formalismos métrico e de Palatini são abordados.*

Teorias de gravidade modificada têm recebido uma atenção crescente ultimamente devido à motivação combinada proveniente da física de altas energias, astrofísica e cosmologia. Dentre as numerosas alternativas à Relatividade Geral, as teorias que incluem invariantes de curvatura não-lineares em R , incluindo as teorias $f(R)$, tem uma longa história. O *status* único da RG dentre as teorias de gravitação começou a ser questionado apenas poucos anos após sua introdução. A curiosidade científica e a determinação em se entender a teoria recém-proposta levaram Weyl (1919) e, logo depois, Eddington (1923) a começarem a considerar modificações da teoria incluindo invariantes não-lineares em sua ação. Nesta época, ainda não existiam motivações experimentais para se generalizar a ação gravitacional.

As primeiras motivações vieram surgir, principalmente, após o advento da mecânica quântica. Atualmente sabe-se que quando correções quânticas ou de teoria de cordas são levadas em conta, a ação gravitacional efetiva de baixa energia admite invariantes de curvatura de ordem superior (Birrell & Davies 1982, Buchbinder et al. 1992, Vilkovisky 1992). A RG (que é linear em R) não é renormalizável e, portanto, é bem conhecido que ela não pode ser quantizada convencionalmente. Este resultado já havia sido reforçado em meados do século passado por trabalhos como o de Utiyama & DeWitt (1962), que mostraram que renormalização em um *loop* exige que a ação de Einstein–Hilbert seja complementada por termos de curvatura não-lineares, e o de Stelle (1977), que mostrou que as ações de ordem superior em R são, de fato, renormalizáveis (mas não unitárias).

Todas estas considerações serviram de estímulo para modificações na ação da RG. No entanto, estas modificações foram consideradas relevantes apenas em regimes de altas energias ou em escalas próximas à escala de Planck como, por exemplo, no início do Universo ou próximo

de singularidades de buraco negro. Logo, estas correções não deveriam afetar os fenômenos gravitacionais em cenários de baixas energias, como o Universo recente.

Uma nova motivação para modificações na RG começou a surgir a partir dos novos resultados observacionais mencionados na seção 3.2. Estas novas evidências revelaram uma imagem bastante inesperada do Universo, imagem esta que é no mínimo surpreendente e definitivamente ainda espera por uma explicação.

Vimos na seção 3.3.1 que o modelo mais simples que explica os dados atuais é o modelo Λ CDM, que deve ainda ser suplementado por algum cenário inflacionário, geralmente baseado em algum campo escalar, conhecido como *inflaton*. Porém, os problemas da constante cosmológica já mencionados fazem com que alguns considerem pobres as motivações para este modelo do ponto de vista teórico, interpretando-o como um mero ajuste aos dados observacionais (Sotiriou & Faraoni 2010). Também vimos no capítulo anterior que estes problemas serviram de combustível para várias dinâmicas alternativas para a energia escura. No entanto, nenhuma dessas tentativas estão livres de problemas.

Um último estímulo para o estudo de teorias de gravidade modificada surge da possibilidade de nossa descrição da interação gravitacional em grandes escalas ainda não ser suficientemente tão adequada quanto desejamos. Uma vez que de todas as interações fundamentais é justamente a gravidade que rege a dinâmica cósmica, uma descrição incompleta — ou mesmo errada — de seu comportamento em escalas cosmológicas pode estar na raiz de, pelo menos, alguns dos problemas até aqui mencionados. Com este ponto de vista, investigar as consequências de modificações na ação padrão da RG poderia nos ajudar a responder alguns desses enigmas cosmológicos e astrofísicos.

Neste capítulo, descreveremos os aspectos mais importantes das teorias $f(R)$. Iremos seguir a linha de raciocínio apresentada em Sotiriou & Faraoni (2010) e Oliveira (2010), mas nos focando nas equações mais importantes e nos aspectos teóricos mais relevantes para esta tese. Um estudo completo incluindo os aspectos mais gerais sobre essas teorias, bem como sobre gravidade modificada em geral, pode ser encontrado em diversos livros ou artigos de revisão sobre este tema como, por exemplo, Capozziello & Francaviglia (2008), Capozziello & Faraoni (2011), Clifton et al. (2012).

Como já foi visto no primeiro capítulo, e também pode ser visto em muitos livros e artigos de revisão (veja, por exemplo, Misner et al. (1973), Wald (1984), Amendola & Tsujikawa (2010)), podemos adotar pelo menos dois formalismos variacionais distintos quando desejamos obter as equações de campo a partir de uma ação: o formalismo métrico e o formalismo de Palatini. Como iremos ver adiante, ambos os formalismos levam às mesmas equações de campo e se reduzem à RG para ações cuja Lagrangeana é linear em R . No entanto, o mesmo já não ocorre para teorias com ações mais gerais (Buchdahl 1970, Exirifard & Sheikh-Jabbari 2008, Burton & Mann 1998a,b, Querella 1998, Shahid-Saless 1987). Podemos concluir deste fato que para cada modelo $f(R)$ existe, na verdade, duas versões/teorias de gravidade, uma para cada formalismo variacional adotado*.

* Existe, na realidade, mais um formalismo variacional além do métrico e o de Palatini, o formalismo métrico-afim. Discutiremos brevemente esta formulação na seção 4.3. Para uma descrição mais completa veja, no entanto, Sotiriou & Faraoni (2010). Nesta tese, daremos ênfase apenas às questões referentes às formulações métrica e de Palatini.

Embora o objetivo principal dos trabalhos que compõem esta tese tenha sido investigar a viabilidade observacional do formalismo de Palatini, iremos mostrar, por razões de completeza, a obtenção das equações de campo nas duas formulações, apontando também suas consequências cosmológicas e as principais diferenças entre ambas.

4.1. O formalismo métrico

No formalismo métrico, o único campo livre da ação é dado pela métrica, de modo que a variação deve ser tomada apenas com relação a esta variável. Ele é considerado mais convencional que o formalismo de Palatini e, na verdade, este foi o empregado por Einstein na obtenção de suas equações de campo. Neste ponto, é importante esclarecer a diferença entre os termos “formalismo métrico” e “teoria métrica”: enquanto o “formalismo métrico” é um formalismo variacional, “teorias métricas” são teorias que satisfazem os seguintes *postulados métricos* (Will 1993):

1. O espaço-tempo é descrito por uma métrica simétrica;
2. As trajetórias de partículas-teste em queda livre são geodésicas desta métrica;
3. Em referenciais locais em queda livre, as leis físicas não-gravitacionais são as leis da Relatividade Especial.

Teorias que seguem estes postulados são as únicas que podem satisfazer o princípio de equivalência de Einstein, o que nos leva à conclusão de que a RG é uma teoria métrica de gravidade. Podemos dizer, em outras palavras, que teorias métricas são aquelas em que a matéria deve estar acoplada minimamente à métrica, sem estar acoplada a mais nenhum outro campo dinâmico (Sotiriou & Faraoni 2010). Assim como na RG, teorias $f(R)$ no formalismo métrico e de Palatini se valem desta característica e ambas são, portanto, teorias métricas.

4.1.1. As equações de campo

Quando se adota o formalismo métrico, as equações de campo são obtidas como segue. Vamos partir da ação generalizada consistindo da ação de Einstein–Hilbert modificada por uma teoria $f(R)$ e ação para os campos de matéria e energia. Esta ação é obtida a partir das Eqs. (1.2) e (2.18) na forma

$$S_{\text{mét}} = S_f + S_m = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (4.1)$$

onde a inclusão do índice “mét” ficará mais clara na seção 4.2. Para obtermos as equações de campo, iremos utilizar o princípio da mínima ação e variar a ação acima com relação à métrica inversa $g^{\mu\nu}$, com $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta}$,

$$\delta S_{\text{mét}} = \delta S_f + \delta S_m = 0. \quad (4.2)$$

Iremos encontrar os termos da variação separadamente, primeiro para a parte gravitacional δS_f e depois para a parte material δS_m . Para a parte gravitacional nós obtemos

$$\delta S_f = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta \left[\sqrt{-g} f(R) \right] = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\sqrt{-g} f_R(R) \delta R + f(R) \delta \sqrt{-g} \right], \quad (4.3)$$

onde, a partir de agora, utilizaremos a notação $(R) \equiv d/dR$, ou seja, $f_R \equiv df/dR$, $f_{RR} \equiv d^2f/dR^2$, e assim por diante. Pela definição do escalar de Ricci dada pela Eq. (2.6), nós temos

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

onde $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = -\Delta_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ e $\Delta_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square$. Utilizando a relação

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

nós obtemos então

$$\delta S_f = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} f_R(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{4\kappa} f(R) g_{\mu\nu} - \frac{1}{2\kappa} \Delta_{\mu\nu} f_R(R) \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

De maneira similar, para a ação da matéria nós temos

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \int d^4x \delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m \right) \delta g^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde fizemos uso da Eq. (2.16). Para qualquer que seja a variação $\delta g^{\mu\nu}$, utilizando o princípio da mínima ação (4.2), nós obtemos $\delta S_f = -\delta S_m$. Portanto

$$f_R(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\nu} f_R(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

que são as equações de campo para teorias $f(R)$ no formalismo métrico.

Note que, para uma teoria linear em R , essas equações de campo se reduzem àquelas da RG, dadas pela Eq. (2.14), uma vez que o último termo do lado esquerdo se anula. Observe também que a Eq. (4.8) é uma equação diferencial parcial de 4ª ordem na métrica $g_{\mu\nu}$, uma vez que R inclui derivadas de 2ª ordem. Note ainda que o traço da Eq. (4.8) fornece

$$R f_R - 2f + 3\square f_R = \kappa T, \quad (4.9)$$

onde $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$. Esta equação nos dá uma relação diferencial entre R e T , e não uma relação algébrica como na RG (onde $R = -\kappa T$). Esta já é uma indicação de que as equações de campo das teorias $f(R)$ admitem uma maior variedade de soluções em comparação com a Relatividade Geral.

Existem mais alguns aspectos interessantes sobre as equações de campo (4.8), mas que fogem do escopo deste texto (veja, por exemplo, Sotiriou & Faraoni (2010) para uma lista dos mais relevantes.) No entanto, algo que nos interessa em particular é que podemos reescrever a Eq. (4.8) na forma das equações de campo de Einstein, fazendo uso de um “tensor energia-momento efetivo” contendo termos de curvatura. A partir da Eq. (4.8) temos

$$R_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{f_R} \left[T_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{2} f g_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu} f_R \right) \right]. \quad (4.10)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \\
&= \frac{\kappa}{f_R} \left[T_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{2}f g_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu}f_R \right) \right] - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \\
&= \frac{\kappa}{f_R} \left\{ T_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} \left[\left(\frac{f - Rf_R}{2} \right) f g_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu}f_R \right] \right\} \\
&= \kappa_{\text{ef}} \left[T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\text{eff})} \right], \tag{4.11}
\end{aligned}$$

onde a quantidade $\kappa_{\text{ef}} \equiv 8\pi G_{\text{ef}} = 8\pi G/f_R$ define um acoplamento gravitacional efetivo. O requerimento de que a gravidade seja sempre atrativa implica, portanto, em $f_R(R) > 0$. Uma discussão mais detalhada sobre essa condição poderá ser encontrada na seção 4.6.

4.1.2. Equivalência com a teoria de Brans–Dicke

A equivalência dinâmica entre a gravidade $f(R)$ e a teoria de Brans–Dicke tem sido extensivamente investigada na literatura (veja, por exemplo, Teyssandier & Tourenc 1983, Whitt 1984, Barrow & Cotsakis 1988, Maeda 1989, Magnano & Sokolowski 1994, Wands 1994, Flanagan 2004a,b, Olmo & Komp 2004, Olmo 2005, Allemandi et al. 2006, Sotiriou 2006b). Introduzindo um novo campo χ , a ação (4.1) pode ser transformada dinamicamente em (Teyssandier & Tourenc 1983)

$$S_{\text{mét}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[f(\chi) + f_\chi(R - \chi) \right] + S_{\text{m}}(g_{\mu\nu}, \psi). \tag{4.12}$$

onde $f_\chi \equiv df/d\chi$. Deste modo, a ação acima é dinamicamente equivalente à ação (4.1) para $\chi = R$. A variação da ação (4.12) com relação à χ fornece $f_{\chi\chi}(\chi)(R - \chi) = 0$, de modo que $\chi = R$ se $f_{\chi\chi}(\chi) \neq 0$. Se redefinirmos o campo ϕ por $\phi = f_\chi(\chi)$, o termo entre colchetes na ação (4.12) poderá ser reescrito como

$$f(\chi(\phi)) + f_\chi(R - \chi) = \phi R - [\chi(\phi)\phi - f(\chi(\phi))] = \phi R - U(\phi), \tag{4.13}$$

onde $U(\phi)$ é o potencial do campo ϕ . Com isto, a ação (4.12) toma a forma

$$S_{\text{mét}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - U(\phi)] + S_{\text{m}}(g_{\mu\nu}, \psi), \tag{4.14}$$

que é idêntica à forma (3.22) sem o termo cinético. A conclusão é que teorias $f(R)$ no formalismo métrico são dinamicamente equivalentes à teoria de Brans–Dicke para $\omega_{\text{BD}} = 0$ (Teyssandier & Tourenc 1983, Wands 1994). Existe, no entanto, uma condição para a equivalência entre as teorias $f(R)$ e a teoria de Brans–Dicke. Esta equivalência exige $f_{RR}(R) \neq 0$ para que a transformação $\phi = f_R(R)$ seja inversível. Esta é uma condição suficiente, mas não necessária para a inversibilidade. A única condição necessária para esta equivalência é que $f_R(R)$ seja contínua e unívoca (Olmo 2007). Quando $f_{RR} = 0$, a equivalência entre as teorias não pode ser garantida, embora não seja excluída *a priori* (Sotiriou & Faraoni 2010).

4.1.3. Dinâmica cósmica

Para obtermos as equações da evolução cosmológica de uma teoria $f(R)$ no formalismo métrico (e também no formalismo de Palatini), iremos sempre considerar que nosso universo é descrito pela métrica FLRW (2.31) espacialmente plana ($k = 0$). Iremos também assumir que os constituintes cósmicos são descritos por um fluido perfeito (2.8) e p e ρ representarão a pressão e a densidade de energia, respectivamente. Vamos assumir ainda algumas restrições sobre as formas escolhidas para a função $f(R)$: $f_R > 0$ para termos um acoplamento gravitacional efetivo positivo ($G_{\text{ef}} = G/f_R > 0$), e $f_{RR} > 0$ para evitarmos a chamada *instabilidade de Dolgov–Kawasaki* (ver seção 4.7). Não iremos aqui desenvolver os cálculos que levam às equações de Friedmann modificadas de maneira minuciosa. Estas equações podem ser obtidas de maneira direta a partir das componentes de $R_{\mu\nu}$ para a métrica FLRW, que são encontradas em muitos livros-texto. Aqui, é suficiente dizer que, inserindo a métrica FLRW e assumindo o tensor energia-momento (2.8) nas equações de campo (4.8), as componentes tempo-tempo e espaciais dessas equações fornecem, respectivamente,

$$H^2 = \frac{\kappa}{3f_R} \left(\rho + \frac{Rf_R - f}{2} - 3H\dot{R}f_{RR} \right), \quad (4.15)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{\kappa}{f_R} \left[p + \dot{R}^2 f_{RRR} + 2H\dot{R}f_{RR} + \ddot{R}f_{RR} + \frac{1}{2}(f - Rf_R) \right], \quad (4.16)$$

onde $H = \dot{a}/a$ e o escalar de Ricci é dado por

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2). \quad (4.17)$$

Note que R tem as mesmas dimensões de H^2 . Observe ainda que, fazendo $f(R) = R$, nós temos $f_R = 1$ e $f_{RR} = f_{RRR} = 0$. Com isso, as Eqs. (4.15) e (4.16) se reduzem às equações de Friedmann usuais (2.55) e (2.56) para $k = 0$.

Diferentemente do que ocorre em modelos de energia escura, não estamos incluindo aqui nenhuma componente exótica de energia com o objetivo de acelerar a expansão cósmica. Estamos, de fato, descrevendo um universo composto basicamente por matéria (seja escura e/ou bariônica) e radiação, de forma que a pressão e a densidade de energia que surgem nas equações de Friedmann (4.15) e (4.16) são dadas por $\rho = \rho_m + \rho_r$ e $p = p_r$ (com $p_m = 0$). Para visualizarmos de que modo as teorias $f(R)$ podem acelerar a expansão do Universo, é útil definirmos a densidade e a pressão relacionadas com a modificação na gravidade. Nós temos então

$$\rho_{\text{curv}} = \frac{Rf_R - f}{2f_R} - \frac{3H\dot{R}f_{RR}}{f_R}, \quad (4.18)$$

$$p_{\text{curv}} = \frac{\dot{R}^2 f_{RRR} + 2H\dot{R}f_{RR} + \ddot{R}f_{RR} + \frac{1}{2}(f - Rf_R)}{f_R}, \quad (4.19)$$

Substituindo essas equações nas Eqs. (4.15) e (4.16) nós obtemos, após alguma álgebra, as equações que governam a dinâmica cósmica na forma das equações de Friedmann usuais, ou seja,

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho_{\text{ef}}, \quad (4.20)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho_{\text{ef}} + 3p_{\text{ef}}), \quad (4.21)$$

onde $\rho_{\text{ef}} = \rho + \rho_{\text{curv}}$ e $p_{\text{ef}} = p + p_{\text{curv}}$. O parâmetro da equação de estado efetivo relacionado com a densidade e a pressão do “fluido de curvatura” pode ser expresso por

$$w_{\text{curv}} \equiv \frac{p_{\text{curv}}}{\rho_{\text{curv}}} = \frac{\dot{R}^2 f_{RRR} + 2H\dot{R}f_{RR} + \ddot{R}f_{RR} + \frac{1}{2}(f - Rf_R)}{\frac{Rf_R - f}{2} - 3H\dot{R}f_{RR}}. \quad (4.22)$$

Observe que o sinal de w_{curv} é determinado apenas pelo numerador da Eq. (4.22), uma vez que, sendo uma densidade, o denominador é sempre positivo. Em geral, para termos uma equação de estado do tipo de Sitter ($w_{\text{curv}} = -1$) nós devemos ter

$$\frac{f_{RRR}}{f_{RR}} = \frac{\dot{R}H - \ddot{R}}{\dot{R}^2}. \quad (4.23)$$

Podemos ainda, fazendo uso das Eqs. (4.20) e (4.21), definir um parâmetro de equação de estado efetivo como

$$w_{\text{ef}} \equiv \frac{p_{\text{ef}}}{\rho_{\text{ef}}} = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} = -1 - \frac{2}{3H} \frac{dH}{d \ln a} = -1 + \frac{2(1+z)}{3H} \frac{dH}{dz}. \quad (4.24)$$

O principal aspecto dessas equações no contexto cosmológico é que os termos de curvatura que surgem na ação (4.1) estão todos contidos em ρ_{curv} e p_{curv} . Portanto, esses termos fazem nas teorias $f(R)$ o mesmo papel que a energia escura realiza no contexto da Relatividade Geral (Sotiriou & Faraoni 2010). É importante frisar que, embora esta representação das modificações na gravidade por um “fluido de curvatura” descrito pela Eq. (4.22) possa facilitar a comparação com modelos de energia escura, os termos extras destas modificações possuem uma origem geométrica e uma interpretação neste sentido deve ser realizada mesmo quando modelos de $f(R)$ e de energia escura aparentam ser indistinguíveis em certos regimes de curvatura.

4.2. O formalismo de Palatini

No formalismo de Palatini[†], a métrica e a conexão são consideradas variáveis independentes entre si e a variação deve ser tomada com relação a ambas, com a suposição de que a ação da matéria não depende da conexão. Uma vantagem do formalismo de Palatini sobre o formalismo métrico é que as equações de campo do primeiro formalismo são de segunda ordem na métrica, enquanto que no último elas são de quarta ordem. Além disto, como veremos adiante, o formalismo de Palatini nos leva às equações de campo de Einstein mais diretamente do que no formalismo métrico para uma teoria que é linear em R .

Antes de obtermos as equações de campo no formalismo de Palatini, faremos algumas considerações para mostrarmos mais algumas diferenças entre este formalismo e o métrico. Antes de tudo, devemos enfatizar que a conexão nesta formulação não é definida *a priori*, mas é assumida como sendo simétrica. A conexão também não é mais dependente da métrica e, como

[†] Segundo (Ferraris et al. 1982) foi Einstein e não Palatini que o introduziu.

consequência disto, embora a ação generalizada para os dois formalismos seja essencialmente a mesma, o mesmo não ocorre para os tensores de Riemann e de Ricci — e, conseqüentemente, para o escalar de Ricci. Isto se deve ao fato de que, no formalismo de Palatini, essas mesmas quantidades são construídas a partir da conexão independente. Nós iremos, portanto, escrever o tensor de Ricci formado a partir da conexão independente com o símbolo $\mathcal{R}_{\mu\nu}$, para diferenciá-lo do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ utilizado no formalismo métrico (daí surge o motivo de colocarmos os índices “mét” e “Pal” nas ações (4.1) e (4.25), respectivamente). Da mesma forma, expressaremos o escalar de Ricci no formalismo de Palatini por $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$ ao invés de R . Portanto, para o formalismo de Palatini, iremos utilizar a seguinte ação:

$$S_{\text{Pal}} = S_f + S_m(g_{\mu\nu}, \psi) = \frac{1}{2K} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (4.25)$$

O formalismo de Palatini está baseado na suposição de que a ação da matéria S_m depende apenas da métrica e dos campos de matéria, mas não das conexões independentes. Uma consequência desta suposição é que a conexão independente $\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$ não mais define a derivada covariante ou o transporte paralelo. Neste caso, a conexão que define a derivada covariante é a conexão de Levi–Civita $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$. Como já vimos anteriormente, outra implicação desta suposição é que a formulação de Palatini também é considerada uma teoria métrica.

4.2.1. As equações de campo

Antes de iniciarmos o procedimento para a variação da ação (4.25), precisamos obter uma expressão para a variação do tensor de Ricci ($\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}$). Como estamos supondo que as conexões são simétricas, pode ser mostrado que (Schrödinger 1963)

$$\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} = \hat{\nabla}_\alpha(\delta\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}) - \hat{\nabla}_\nu(\delta\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\alpha}), \quad (4.26)$$

onde $\hat{\nabla}$ representa a derivada covariante construída a partir das conexões independentes, que não são as conexões de Levi–Civita para a métrica $g_{\mu\nu}$.

A variação da Lagrangiana gravitacional na ação (4.25) com relação à métrica resulta em

$$\delta[\sqrt{-g}f(\mathcal{R})] = \delta\sqrt{-g}f + \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}\delta\mathcal{R} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}f_{g^{\mu\nu}}(\delta g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}(\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}), \quad (4.27)$$

onde utilizamos as relações (4.5) e $\delta\mathcal{R} = (\delta g^{\mu\nu})\mathcal{R}_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\delta\mathcal{R}_{\mu\nu})$. Com isto, a variação total da ação de Palatini (4.25) é

$$\delta S_{\text{Pal}} = \frac{1}{2K} \int d^4x \sqrt{-g} \left(f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{f}{2}g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2K} \int d^4x \sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} (\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}), \quad (4.28)$$

Com o auxílio da Eq. (4.26), podemos escrever a segunda integral na variação (4.28) como

$$I \equiv \int d^4x \sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} (\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}) = \int d^4x \left[\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\alpha(\delta\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}) - \sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\nu(\delta\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\alpha}) \right], \quad (4.29)$$

que, com a utilização das relações

$$\hat{\nabla}_\alpha \left[\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} (\delta\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}) \right] = \sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\alpha(\delta\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}) + \hat{\nabla}_\alpha \left[\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \right] (\delta\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}), \quad (4.30)$$

$$\hat{\nabla}_\nu \left[\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} (\delta\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\alpha}) \right] = \sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\nu(\delta\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\alpha}) + \hat{\nabla}_\nu \left[\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \right] (\delta\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\alpha}), \quad (4.31)$$

torna-se

$$\begin{aligned}
 I = & \int d^4x \left[\hat{\nabla}_\alpha \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \delta \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} \right) - \hat{\nabla}_\nu \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \delta \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\alpha} \right) \right] \\
 & + \int d^4x \left[-\hat{\nabla}_\alpha \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \right) (\delta \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}) + \hat{\nabla}_\nu \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \right) (\delta \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\alpha}) \right]. \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

Reorganizando termos e índices e utilizando $\delta \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\alpha} = \delta_\alpha^\nu (\delta \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu})$, obtemos

$$\begin{aligned}
 I = & \int d^4x \hat{\nabla}_\alpha \left[\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} \left(g^{\mu\nu} \delta \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \delta \hat{\Gamma}^\beta_{\mu\beta} \right) \right] \\
 & + \int d^4x \left[-\hat{\nabla}_\alpha \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \right) + \hat{\nabla}_\sigma \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\sigma\mu} \right) \delta_\alpha^\nu \right] (\delta \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}), \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Gauss, a primeira integral na Eq. (4.33) pode ser reescrita como uma integral de superfície, que é nula, pois na superfície temos $\delta \hat{\Gamma} = 0$. Quanto à segunda integral, podemos escrevê-la na forma $\int d^4x T_\alpha^{\mu\nu} \delta \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$, com $T_\alpha^{\mu\nu} = -\hat{\nabla}_\alpha \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \right) + \hat{\nabla}_\sigma \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\sigma\mu} \right) \delta_\alpha^\nu$. Mesmo não sendo simétrico nos índices μ e ν , podemos escrever o tensor $T_\alpha^{\mu\nu}$ somando as partes simétrica e anti-simétrica nesses índices, ou seja, $T_\alpha^{\mu\nu} = T_\alpha^{(\mu\nu)} + T_\alpha^{[\mu\nu]}$, tal que

$$T_\alpha^{(\mu\nu)} = -\hat{\nabla}_\alpha \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \right) + \hat{\nabla}_\sigma \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\sigma(\mu} \right) \delta_\alpha^{\nu)}, \quad (4.34)$$

$$T_\alpha^{[\mu\nu]} = \hat{\nabla}_\sigma \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\sigma[\mu} \right) \delta_\alpha^{\nu]} . \quad (4.35)$$

Como $T_\alpha^{[\mu\nu]} \delta \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = 0$, nos interessa apenas a parte simétrica de $T_\alpha^{\mu\nu}$. Todas estas considerações reduzem a integral (4.33) à forma

$$I = \int d^4x \left[-\hat{\nabla}_\alpha \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \right) + \hat{\nabla}_\sigma \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\sigma(\mu} \right) \delta_\alpha^{\nu)} \right] (\delta \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}). \quad (4.36)$$

Isto nos permite então escrever a variação da ação (4.28) como

$$\begin{aligned}
 \delta S_{\text{Pal}} = & \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left(f_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\
 & + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[-\hat{\nabla}_\alpha \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \right) + \hat{\nabla}_\sigma \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\sigma(\mu} \right) \delta_\alpha^{\nu)} \right] \delta \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}. \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Podemos notar na equação acima a existência de dois termos, um que depende da variação com relação à métrica $g^{\mu\nu}$ e outro que depende da variação com relação à conexão $\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$. Logo, ao aplicarmos o princípio da mínima ação ($\delta S_{\text{Pal}} = 0$) na Eq. (4.25), o fato de neste formalismo considerarmos as duas quantidades como sendo independentes uma da outra nos leva então ao seguinte conjunto de equações

$$f_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.38)$$

$$-\hat{\nabla}_\alpha \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \right) + \hat{\nabla}_\sigma \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\sigma(\mu} \right) \delta_\alpha^{\nu)} = 0, \quad (4.39)$$

onde (4.38) é obtida através da variação de (4.37) com relação à métrica e representam as equações de campo generalizadas de Einstein–Hilbert para o formalismo de Palatini, e (4.39) é obtida através da variação com relação às conexões, cuja solução deve fornecer dos campos

$\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$. O traço das Eqs. (4.39) nos permite reescrever as equações de campo em uma forma mais compacta:

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{f}{2}g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.40)$$

$$\hat{\nabla}_\alpha \left(\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \right) = 0. \quad (4.41)$$

Observe que, para o caso linear $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, temos $f_{\mathcal{R}} = 1$ e a Eq. (4.41) torna-se a definição da conexão de Levi–Civita para a conexão inicialmente independente $\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$, levando com isso a $\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$ e $\mathcal{R} = R$. Neste caso, as equações de campo (4.40) se reduzem às da Relatividade Geral, como já era de se esperar.

Vamos analisar as características das Eqs. (4.40) e (4.41) separadamente. Tomando o traço das Eqs. (4.40) nós obtemos

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R} - 2f = \kappa T, \quad (4.42)$$

que pode ser resolvida algebricamente para $\mathcal{R} = \mathcal{R}(T)$ dada uma função $f(\mathcal{R})$. Podemos ver que, para os campos de matéria com $T = 0$ (incluindo também campos eletromagnéticos e a radiação), \mathcal{R} é constante e raiz da equação

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R} - 2f = 0. \quad (4.43)$$

Consequentemente $f(\mathcal{R})$ e $f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})$ também serão constantes e a teoria se reduzirá à RG com uma constante cosmológica e um acoplamento gravitacional constante dado por $G/f_{\mathcal{R}}$. Neste caso, podemos comparar a equação do traço das equações de campo da RG com constante cosmológica, $R = -\kappa T + 4\Lambda$, com a Eq. (4.42) e utilizar a Eq. (4.43) para mostrar que o valor da constante cosmológica é (Sotiriou & Faraoni 2010)

$$\frac{1}{2} \left(\mathcal{R}_{T=0} - \frac{f(\mathcal{R}_{T=0})}{f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{T=0})} \right) = \frac{\mathcal{R}_{T=0}}{4}, \quad (4.44)$$

onde $\mathcal{R}_{T=0} = \mathcal{R}(T = 0)$. Ferraris et al. (1994) mostraram que para os casos em que a Eq. (4.43) não possui raiz, as equações de campo (4.40) e (4.41) não são consistentes. Portanto, escolhas de funções $f(\mathcal{R})$ que levam a esse comportamento devem ser evitadas.

Com relação à Eq. (4.41), ela é a definição da conexão de Levi–Civita para uma nova métrica $h_{\mu\nu}$ através da transformação conforme

$$h_{\mu\nu} = f_{\mathcal{R}} g_{\mu\nu}, \quad (4.45)$$

podendo, portanto, ser reescrita como

$$\hat{\nabla}_\alpha \left(\sqrt{-h} h^{\mu\nu} \right) = 0. \quad (4.46)$$

Escrita em termos da nova métrica, a conexão $\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$ é dada por

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \left(h_{\beta\nu,\mu} + h_{\mu\beta,\nu} - h_{\mu\nu,\beta} \right), \quad (4.47)$$

enquanto que, em termos da métrica $g_{\mu\nu}$ temos pela Eq. (4.45)

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2f_{\mathcal{R}}} \left(\delta^\alpha_\mu \partial_\nu f_{\mathcal{R}} + \delta^\alpha_\nu \partial_\mu f_{\mathcal{R}} + g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\beta f_{\mathcal{R}} \right), \quad (4.48)$$

onde $\{\overset{\alpha}{\mu\nu}\}$ são as conexões de Levi–Civita para a métrica $g_{\mu\nu}$, dadas pela Eq. (2.3). Pode ser mostrado então que, em termos desta conexão, o tensor de Riemann generalizado pode ser escrito como (Vollick 2003)

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\beta}(\hat{\Gamma}) = \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu,\beta} - \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\beta,\nu} + \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\sigma}\hat{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\sigma}\hat{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\beta}. \quad (4.49)$$

Deste modo, o tensor de Ricci pode ser obtido a partir do tensor de Riemann acima utilizando a definição (2.5).

Uma consequência útil dessas relações é que as equações de campo no formalismo de Palatini podem ser reduzidas a apenas uma, a Eq. (4.40). Como a Eq. (4.42) pode ser resolvida para $\mathcal{R} = \mathcal{R}(T)$ e a Eq. (4.48) nos fornece $\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$ em termos de \mathcal{R} e $g^{\mu\nu}$, nós podemos eliminar a conexão independente das equações de campo e expressá-las apenas em função da métrica e dos campos de matéria. Outra consequência é que os termos em (4.48) envolvendo $f_{\mathcal{R}}$ podem ser expressos como derivadas de T . Uma vez que T contém apenas a métrica e não suas derivadas, a conexão envolverá somente as primeiras derivadas da métrica, de modo que as equações de campo (4.40) serão de segunda ordem na métrica $g_{\mu\nu}$.

Assim como fizemos para o formalismo métrico, também podemos reescrever as equações de campo (4.40) em uma forma semelhante às equações de Einstein (2.14) (Sotiriou & Faraoni 2010), com o tensor de Einstein, calculado com a métrica $g_{\mu\nu}$, dado por

$$G_{\mu\nu} = \kappa_{\text{ef}} T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left(\mathcal{R} - \frac{f}{f_{\mathcal{R}}} \right) + \frac{1}{f_{\mathcal{R}}} \left(\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - g_{\mu\nu} \square \right) f_{\mathcal{R}} - \frac{3}{2(f_{\mathcal{R}})^2} \left[\nabla_{\mu} f_{\mathcal{R}} \nabla_{\nu} f_{\mathcal{R}} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} (\nabla f_{\mathcal{R}})^2 \right]. \quad (4.50)$$

onde, assim como na Eq. (4.11), a quantidade $\kappa_{\text{ef}} \equiv \kappa/f_{\mathcal{R}}$ é o acoplamento gravitacional efetivo da teoria. Para obtermos a expressão (4.50) é necessário expressarmos a relação entre o tensor de Ricci generalizado $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ e o tensor de Ricci dependente da métrica $g_{\mu\nu}$. É possível demonstrar que (Oliveira 2010)

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3\nabla_{\mu} f_{\mathcal{R}} \nabla_{\nu} f_{\mathcal{R}}}{2(f_{\mathcal{R}})^2} - \frac{1}{f_{\mathcal{R}}} \left[\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square \right] f_{\mathcal{R}}, \quad (4.51)$$

onde as derivadas covariantes ∇_{μ} devem agora ser efetuadas com a conexão métrica de Levi–Civita. O traço desta equação fornece

$$\mathcal{R} = R + \frac{3\nabla_{\mu} f_{\mathcal{R}} \nabla^{\mu} f_{\mathcal{R}}}{2(f_{\mathcal{R}})^2} - \frac{3\square f_{\mathcal{R}}}{f_{\mathcal{R}}}. \quad (4.52)$$

Observe que \mathcal{R} não é o escalar de Ricci de $h_{\mu\nu}$, uma vez que a métrica utilizada para a contração de $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ foi $g_{\mu\nu}$. Note ainda que ambos os lados da Eq. (4.50) dependem apenas da métrica e dos campos de matéria, o que faz com as equações de campo para esta teoria sejam expressas na forma da RG, mas com o lado da fonte (o lado direito) modificado e que inclui derivadas do tensor energia-momento, dado que $f_{\mathcal{R}}$ é, na prática, uma função implícita de T .

4.2.2. Equivalência com a teoria de Brans–Dicke

Teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo de Palatini também podem ser reformuladas como uma teoria de Brans–Dicke (Flanagan 2004a, Olmo 2005, Sotiriou 2006b). Para examinarmos a equivalência

entre as teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo de Palatini com as teorias de Brans–Dicke, é importante lembrar que as conexões utilizadas neste formalismo são as conexões de Levi–Civita para a métrica $h_{\mu\nu} = f_R g_{\mu\nu}$. Deste modo, f_R pode ser interpretado como sendo o novo campo escalar ϕ , de forma que $h_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}$.

Após isso, podemos utilizar a expressão (4.52) para expressarmos \mathcal{R} em termos de R e ϕ , ou seja,

$$\mathcal{R} = R + \frac{3\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi}{2\phi^2} - \frac{3\Box\phi}{\phi}. \quad (4.53)$$

Agora vamos utilizar a Eq. (4.14) no contexto do formalismo de Palatini, isto é, $R \rightarrow \mathcal{R}$. Então, inserindo a Eq. (4.53) em (4.14) e desprezando a divergência total, obtemos (Sotiriou & Faraoni 2010)

$$S_{\text{Pal}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R + \frac{3}{2\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - U(\phi) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi) \right]. \quad (4.54)$$

Como a Lagrangiana da matéria não possui dependência com a conexão $\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$, concluímos que esta ação é matematicamente equivalente à ação (3.22), com parâmetro de Brans–Dicke $\omega_{\text{BD}} = -3/2$.

4.2.3. Dinâmica cósmica

Para obtermos as equações que governam a dinâmica cosmológica no formalismo de Palatini iremos fazer as mesmas suposições consideradas para o formalismo métrico na seção 4.1.3, ou seja, métrica FLRW plana dada pela Eq. (2.31), tensor energia-momento para um fluido perfeito (2.8), $f_R > 0$ e $f_{\mathcal{R}\mathcal{R}} > 0$. Com estes pressupostos, nós podemos obter as componentes do tensor de Ricci generalizado $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ em termos das componentes do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ associado com a métrica $g_{\mu\nu}$ utilizando a relação (4.51). Isto nos fornece a equação de Friedmann generalizada (veja, por exemplo, Sotiriou & Faraoni 2010)

$$\left(H + \frac{1}{2} \frac{f_{\mathcal{R}\mathcal{R}}}{f_R} \dot{\mathcal{R}} \right)^2 = \frac{1}{6f_R} [\kappa(\rho + 3p) + f]. \quad (4.55)$$

Sabemos que o traço do tensor energia-momento dado pela Eq. (2.11) não contém termos relacionados com a radiação, pois $p_r = \rho_r/3$, tal que $T^{(r)} = 0$. Portanto, como $\rho = \rho_m + \rho_r$ e $p = p_m + p_r$, a Eq. (4.42) fornece diretamente uma relação algébrica entre \mathcal{R} e a densidade de energia da matéria. Esta relação é dada por

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R} - 2f = -\kappa\rho_m. \quad (4.56)$$

Combinando a derivada temporal desta equação com a conservação de energia (2.58) nós obtemos

$$\dot{\mathcal{R}} = \frac{3\kappa H\rho_m}{f_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\mathcal{R} - f_R}. \quad (4.57)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (4.57) na Eq. (4.55) nós temos

$$H^2 = \frac{\kappa\rho_m + 2\kappa\rho_r + f}{6f_{\mathcal{R}}\xi^2}, \quad (4.58)$$

onde

$$\xi \equiv 1 + \frac{3}{2} \frac{f_{\mathcal{R}\mathcal{R}}}{f_{\mathcal{R}}} \frac{\kappa \rho_m}{f_{\mathcal{R}\mathcal{R}} \mathcal{R} - f_{\mathcal{R}}}. \quad (4.59)$$

Note que as equações de Friedmann usuais para $k = 0$ serão completamente recuperadas a partir das expressões acima se f for linear em \mathcal{R} . Além disso, podemos notar que a Eq. (4.58) é, na verdade, a equação de Friedmann usual com uma fonte modificada, onde a forma funcional de $f(\mathcal{R})$ irá determinar como a dinâmica irá ser afetada por esta modificação. Neste ponto, é importante enfatizar que com as Eqs. (4.42), (4.58) e (4.59) é possível, dada uma forma funcional para $f(\mathcal{R})$, determinar uma história cósmica e, simultaneamente, compará-la com as observações astrofísicas e cosmológicas à disposição.

Um particular interesse tem sido focado sobre modelos de $f(\mathcal{R})$ contendo potências de \mathcal{R} . De fato, Vollick (2003) investigou o modelo $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} - \alpha^2/\mathcal{R}$ no formalismo de Palatini e mostrou que este nos leva a uma expansão do tipo de Sitter na medida em que a densidade vai a zero. Este resultado forneceu uma evidência em favor dos modelos tipo $1/\mathcal{R}$ na explicação da aceleração cósmica. Para coincidir com observações da história da expansão, o parâmetro α deve ser da ordem de $\sim 10^{-67} \text{ eV}^2$ (ou $\sim 10^{-53} \text{ m}^{-2}$). Em regimes na qual $\kappa\rho \gg \alpha$, a Eq. (4.58) se reduz com boa precisão à equação de Friedmann usual, o que pode ser verificado substituindo este modelo de $f(\mathcal{R})$ na Eq. (4.58).

Alguns modelos mais gerais baseados em potências positivas (já que pode-se pensar na função $f(\mathcal{R})$ como uma expansão em série) de \mathcal{R} também têm sido considerados na literatura (Meng & Wang 2004c,d, 2005, Sotiriou 2006a,d). No entanto, ao contrário do que acontece no formalismo métrico para estes modelos, pode ser mostrado que tais termos não nos levam à uma fenomenologia cosmológicamente viável. Eles não podem, por exemplo, conduzir a inflação, devido à inexistência no formalismo de Palatini de uma dinâmica extra em comparação com a RG (Meng & Wang 2004d, Sotiriou 2006a). Adicionalmente, Pires et al. (2010) investigaram cosmo graficamente o comportamento de modelos $f(\mathcal{R})$ tipo lei-potência e concluíram que modelos com potências positivas de \mathcal{R} levam a uma história da expansão inviável (ver capítulo 7).

4.3. O formalismo métrico-afim

Outra abordagem às teorias $f(\mathcal{R})$ é o chamado formalismo *métrico-afim* (Hehl & Kerlick 1978, Capozziello et al. 2007, Sotiriou 2007, Sotiriou & Liberati 2007). Neste formalismo, assim como no de Palatini, a métrica e a conexão são independentes entre si. No entanto, diferentemente dos formalismos métrico e de Palatini, a ação da matéria pode depender tanto da métrica como, também, da conexão. A ação para este formalismo pode ser escrita na forma (Sotiriou 2007)

$$S_{\text{mét-afim}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}, \psi). \quad (4.60)$$

Assim como no formalismo de Palatini, o tensor de Ricci $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ depende apenas da conexão. Este formalismo pode, portanto, ser considerado como sendo mais geral que o procedimento de Palatini, reduzindo-se a este último tão logo a dependência da ação da matéria com a conexão deixe de existir.

Uma vez que a conexão é independente da métrica, é possível definir a quantidade

$$\Delta_\alpha{}^{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}}, \quad (4.61)$$

que é o chamado *hipermomento* (Hehl & Kerlick 1978) e representa a variação da ação da matéria com relação à conexão e faz o papel da definição do tensor energia-momento (Sotiriou & Faraoni 2010). Teorias $f(R)$ no formalismo de Palatini são casos particulares das teorias $f(R)$ no formalismo métrico-afim com $\Delta_\alpha{}^{\mu\nu} = 0$. A suposição usual de que a conexão é simétrica não é mais considerada neste formalismo, motivando a definição da quantidade anti-simétrica chamada *tensor torsão de Cartan*, $S^\alpha{}_{\mu\nu} = \hat{\Gamma}^\alpha{}_{[\mu\nu]}$, que não necessariamente é nulo, o que possibilita a existência de torsão na teoria.

Note que, por permitir que a matéria esteja acoplada a outros campos que não apenas a métrica, teorias $f(R)$ neste formalismo não constituem teorias métricas e não possuem uma representação na teoria de Brans–Dicke. Além disso, o formalismo métrico-afim não tem sido investigado tão intensivamente quanto os formalismo métrico e de Palatini. Ele não será abordado nesta tese. Existem, no entanto, análises extensivas desta formulação na literatura (veja, por exemplo, Sotiriou & Liberati 2007, Sotiriou & Faraoni 2010).

4.4. Os *frames* de Jordan e de Einstein

As modificações na ação de Einstein–Hilbert realizadas até aqui nos levaram a equações de campo bastante distintas das fornecidas pela RG. Existe, no entanto, a possibilidade de se trabalhar com as quantidades geométricas de forma que a ação e as equações de campo sejam semelhantes às da teoria de Einstein. Isto pode ser realizado através de dois passos: a realização de uma transformação conforme na métrica $g_{\mu\nu}$ e a separação dos termos geométricos na ação de forma a se recuperar uma ação do tipo Einstein–Hilbert. O preço a ser pago por esta simplificação é o surgimento de um acoplamento não-mínimo entre os campos de matéria e a nova métrica conforme (Barrow & Cotsakis 1988, Amendola 2000, Bean & Magueijo 2001). Além disso, surge um novo grau de liberdade escalar que assume o papel da energia escura e evolui de acordo com um potencial que depende da função $f(R)$ escolhida. Se a transformação entre as duas métricas for bem definida, os resultados obtidos pelas duas descrições — conhecidas na literatura como *frames* — deverão ser intrinsecamente os mesmos.

O *frame* no qual a forma da parte gravitacional da ação pode ser modificada e partículas materiais livres seguem geodésicas da métrica é conhecido como *frame de Jordan*. Já o *frame* no qual a parte gravitacional da ação tem a mesma forma da utilizada na RG e a matéria é não-minimamente acoplada à gravidade é denominado *frame de Einstein*. Atualmente existem discussões e controvérsias a respeito de qual destes dois *frames* é o mais físico ou o mais adequado para o estudo dos problemas cosmológicos. Como em muitos trabalhos, será assumido aqui que não existe nada de excepcional nos dois *frames*. Alguns até mesmo sugerem que o número de *frames* conformes é infinito (Flanagan 2004b, Sotiriou et al. 2008). Esta discussão não será, portanto, abordada nesta tese e iremos trabalhar apenas no *frame* de Jordan. A descrição da versão de teorias $f(R)$ no *frame* de Einstein e a discussão sobre a equivalência entre os dois *frames* pode ser encontrada em Faraoni & Nadeau (2007) e Pogosian & Silvestri (2008).

4.5. Dinâmica nas representações de Brans–Dicke

A representação de Brans–Dicke para as teorias $f(R)$ no formalismo métrico revela que este formalismo gera apenas um grau de liberdade extra em comparação com a RG. Para vermos isto, vamos escrever as equações de campo correspondentes à ação (4.14) (Sotiriou & Faraoni 2010):

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{\phi} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2\phi} g_{\mu\nu} U(\phi) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (4.62)$$

$$R = \frac{dU(\phi)}{d\phi}. \quad (4.63)$$

O traço de (4.62) juntamente com (4.63) fornece

$$3\square\phi + 2U(\phi) - \phi \frac{dU}{d\phi} = \kappa T, \quad (4.64)$$

que é a equação que governa a dinâmica do campo ϕ em função das fontes de matéria. A ausência do termo cinético para o campo escalar na ação (4.14) ou na Eq. (4.63) não implica que este grau de liberdade adicional não carrega dinâmica. De fato, como pode ser visto da Eq. (4.64), ϕ é dinamicamente acoplado aos campos de matéria e, portanto, é um grau de liberdade dinâmico extra. Devemos mencionar também que a Eq. (4.63) restringe a dinâmica de ϕ , levando à conclusão de que as teorias $f(R)$ no formalismo métrico — ou, analogamente, a teoria de Brans–Dicke com $\omega_{\text{BD}} = 0$ — constituem um caso diferenciado das teorias de Brans–Dicke mais gerais (Sotiriou & Faraoni 2010).

Para o formalismo de Palatini, as equações de campo originadas da ação (4.54) são:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{\phi} T_{\mu\nu} - \frac{3}{2\phi^2} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{U}{2\phi} g_{\mu\nu}, \quad (4.65)$$

$$\square\phi = \frac{\phi}{3} \left(R - \frac{dU}{d\phi} \right) + \frac{1}{2\phi} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi, \quad (4.66)$$

onde, tomando o traço da Eq. (4.65) e eliminando R na Eq. (4.66) obtemos

$$2U - \phi \frac{dU}{d\phi} = \kappa T, \quad (4.67)$$

que relaciona o campo ϕ com as fontes de matéria. Vemos que, ao contrário do que ocorre no caso $\omega_{\text{BD}} = 0$, no caso $\omega_{\text{BD}} = -3/2$, que corresponde a teorias $f(R)$ no formalismo de Palatini, o campo ϕ aparenta gerar dinâmica na ação (4.54) e na Eq. (4.66). Esta conclusão é, contudo, equivocada. Como pode ser visto na Eq. (4.67), ϕ é algebricamente relacionado com a matéria para este caso e, portanto, não carrega uma dinâmica intrínseca. Na verdade, podemos combinar as equações de campo (4.65) e (4.67) para obtermos a Eq. (4.50), eliminando ϕ completamente.

Estes esclarecimentos nos levam à seguinte conclusão: enquanto o campo escalar $\phi = f_R$ no formalismo métrico representa um campo dinâmico, no formalismo de Palatini este campo é não-dinâmico (Sotiriou & Faraoni 2010).

O argumento mais comum contra as teorias $f(R)$ é baseado em sua identificação com a teoria de Brans–Dicke ou teorias escalar-tensor mais gerais (Whitt 1984, Maeda 1989, Magnano

& Sokolowski 1994). Vimos na seção 3.4.2 que testes do Sistema Solar descartam baixos valores de ω_{BD} . Isto indica, aparentemente, que qualquer teoria $f(R)$ é automaticamente descartada por esta restrição (Chiba 2003). No entanto, é também conhecido (Hu & Sawicki 2007, Khoury & Weltman 2004a,b) que em regiões de alta densidade, o grau de liberdade escalar não-minimamente acoplado f_R adquire massa efetiva m_{f_R} dependente da curvatura (ou da densidade de energia do ambiente local) através do já mencionado mecanismo camaleão. O limite mencionado para o parâmetro PPN γ na seção 3.4.2 só é aplicável para valores pequenos da massa do campo escalar, uma vez que γ só é independente da massa do campo apenas neste regime (Wagoner 1970). Contudo, se o valor da massa efetiva do campo é alto, o parâmetro γ é sempre da ordem da unidade (Sotiriou & Faraoni 2010). Neste caso, o campo escalar torna-se de curto alcance, não tendo efeito em escalas do Sistema Solar. Por não possuir nenhuma dinâmica extra em comparação à RG, estes efeitos não se aplicam ao formalismo de Palatini. Mesmo assim, embora alguns autores demonstrem certo ceticismo a respeito da utilidade das teorias $f(R)$ devido sua equivalência com a teoria de Brans–Dicke, a discussão acima mostra que, argumentos simples baseados na equivalência formal com a teoria de Brans–Dicke são insuficientes para se fazer definições conclusivas sobre a viabilidade das teorias $f(R)$. Além disso, o que foi exposto nesta seção exemplifica como diferentes representações de uma mesma teoria podem destacar algumas de suas características e ser muito útil para o entendimento da mesma.

4.6. Critérios de viabilidade

É bem conhecido que, quando desejamos investigar a completa viabilidade de uma teoria $f(R)$, ela deve satisfazer certos critérios para que seja teoricamente consistente e compatível com as observações astrofísicas e cosmológicas. Pogosian & Silvestri (2008) compilaram uma lista de requerimentos de viabilidade que modelos $f(R)$ devem satisfazer. Listaremos estas condições abaixo, enfatizando os significados clássicos e quânticos.

1. $f_{RR}(R) > 0$ para $R \gg f_{RR}$. — Do ponto de vista clássico, esta condição é consequência da exigência de um regime de altas curvaturas que seja estável. Quanticamente, isto implica em a massa quadrática do campo escalar (ou *scalon*) $m_{f_R}^2 \approx f_{RR}^{-1}$ ser positiva e assegura que o *scalon* não é um táquion, ou seja, ele não se propaga mais rápido do que a luz.
2. $f_R(R) > 0$ para qualquer R . — Esta condição impede que a constante de Newton efetiva $G_{\text{ef}} = G/f_R$ mude seu sinal. Nariai (1973) e Gurovich & Starobinsky (1979) mostraram que se esta condição é violada, o universo se torna rapidamente não-homogêneo e anisotrópico. Do ponto de vista quântico, este requerimento evita que o gráviton se torne um *ghost*[‡] (Nunez & Solganik 2004).
3. $f_R(R) < 1$. — Devido a confiabilidade dos resultados observacionais provenientes da nucleossíntese primordial e da CMB, é desejável que as teorias $f(R)$ se comportem como o modelo Λ CDM em altos *redshifts* (ou em regimes de altas curvaturas), o que implica em

[‡] Um *ghost* é um grau de liberdade massivo cujo sinal do seu termo cinético dá origem a um estado quantizado de norma negativa, o que para partículas físicas não é aceitável (De Felice et al. 2006).

$f(R)/R, f_R \rightarrow 1$ quando $R \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f(R) = R + \text{constante} . \quad (4.68)$$

Adicionando este limite ao requerimento 1 encontramos que f_R deve ser uma função monotonicamente crescente de R , cujo valor colapsa em 1.

4. $|f_R(R) - 1|$ deve ser pequeno no universo recente. — Esta exigência só é necessária se o objetivo for investigar apenas os efeitos da teoria em escala solar e galáctica, sem estudar as consequências cosmológicas. Ela pode ser escrita como

$$\lim_{R \rightarrow 0} f(R) = R . \quad (4.69)$$

Esta condição assegura que uma pequena diferença no valor do campo escalar entre os regimes de alta densidade no centro galáctico e de baixa densidade na periferia da galáxia (Hu & Sawicki 2007). Khoury & Weltman (2004a) mostraram que a diferença entre estes valores é a responsável pela chamada “quinta força” atuando sobre objetos na vizinhança da galáxia. Assumindo que o processo de formação de galáxias em teorias $f(R)$ é semelhante ao que ocorre na RG, Hu & Sawicki (2007) sugeriram que o valor atual de $|f_R - 1|$ não deve ser maior do que 10^{-6} . É necessário, no entanto, uma investigação mais completa do processo de formação de galáxias em $f(R)$ para limites mais restritivos serem obtidos.

É importante esclarecer aqui a diferença de notação dos diversos modelos de $f(R)$ existentes na literatura. Em muitos casos, o leitor encontrará uma modificação na ação de Einstein–Hilbert do tipo $R \rightarrow R + f(R)$, ao invés da adotada nesta tese, em que $R \rightarrow f(R)$. As condições de viabilidade e também as próprias equações de movimento da teoria irão ser diferentes dependendo da notação escolhida. No entanto, é direta a conversão entre uma notação e outra e o significado das condições listadas acima é o mesmo em ambas.

Sob um ponto de vista mais fenomenológico, Sotiriou & Faraoni (2010) elaboraram critérios adicionais que modelos $f(R)$ devem satisfazer para serem teoricamente consistentes e compatíveis com os experimentos astrofísicos e as observações cosmológicas. Um dos critérios a ser satisfeito é que qualquer modelo $f(R)$ deve gerar perturbações cosmológicas compatíveis com os vínculos cosmológicos da CMB, estruturas de grande escala, e da nucleossíntese primordial. As equações para as perturbações de densidade de matéria foram derivadas no formalismo de Palatini por Koivisto & Kurki-Suonio (2006). A evolução das perturbações cosmológicas é sensível à teoria gravidade adotada e constitui uma possível ferramenta para discriminar entre energia escura e gravidade modificada. Tanto a dinâmica das perturbações cosmológicas quanto a assinatura que elas deixam na CMB e em aglomerados de galáxias são afetadas pela mudança na teoria da gravidade (Knox et al. 2006, Koyama & Maartens 2006, Li & Chu 2006, Shirata et al. 2005, Skordis et al. 2006, Stabenau & Jain 2006, White & Kochanek 2001). Isto originou vários esforços para se vincular a gravidade $f(R)$ com dados da CMB (Amendola & Tsujikawa 2008, Carloni et al. 2008, Li & Barrow 2007, Pogosian & Silvestri 2008, Tsujikawa 2008, Wei & Zhang 2008). Embora a maioria destes trabalhos estejam restritos a escolhas particulares do modelo $f(R)$, alguns poucos resultados mais gerais também foram obtidos. De fato, a condição 1 de Pogosian & Silvestri (2008) já havia sido proposta por Song et al. (2007), que mostrou que tal requerimento assegura a estabilidade das perturbações escalares.

Outro critério que serve de teste para modelos $f(R)$ que tentam explicar a aceleração cósmica é que tais modelos devem descrever a dinâmica cosmológica correta. Basicamente, estes modelos devem prever a sequência padrão das eras cosmológicas: a era dominada pela radiação, a dominada pela matéria e a aceleração atual. Neste sentido, ainda existe um grande debate na literatura acerca da viabilidade dos formalismos métrico e de Palatini e um desfecho ainda parece distante. Por exemplo, um dos debates mais populares diz respeito a modelos do tipo lei-de-potência $f(R) = R - \beta/R^n$. Investigando à luz do formalismo métrico, Amendola et al. (2007b) concluíram que este modelo não prevê uma história da expansão correta. A viabilidade cosmológica deste modelo no formalismo de Palatini será discutida no capítulo 7.

Diversos trabalhos corroboram a ideia de que no formalismo de Palatini é possível se obter a história cosmológica padrão, tanto do ponto de vista teórico (Meng & Wang 2004b, Nojiri & Odintsov 2004, Olmo & Komp 2004, Olmo 2005, Allemandi et al. 2006, Capozziello et al. 2006a, Koivisto & Kurki-Suonio 2006, Li & Chu 2006, Sotiriou 2006a,d), quanto do ponto de vista observacional (Amarzguioui et al. 2006). No entanto, a despeito destes esforços, é consenso que a dinâmica cosmológica de modelos $f(R)$ baseados no formalismo de Palatini ainda não é totalmente compreendida (Fay et al. 2007). De fato, a maioria dos vínculos observacionais existentes na literatura se concentram em modelos semelhantes à forma $f(R) = R - \beta/R^n$. Nesta linha de raciocínio, investigações da história da expansão cósmica utilizando outros modelos no formalismo de Palatini poderão revelar algumas informações a respeito da viabilidade observacional deste formalismo. Um exemplo disto foi demonstrado por Carvalho et al. (2008), Santos et al. (2008), Pires et al. (2010), na qual a presença das três fases da evolução cósmica permitiu a distinção do modelo lei-de-potência no formalismo de Palatini do seu correspondente no formalismo métrico, investigado por Amendola et al. (2007b).

Para resumir esta discussão, podemos dizer que para serem viáveis cosmológicamente, os modelos $f(R)$ devem descrever a dinâmica cosmológica correta, exibir o comportamento correto das perturbações gravitacionais, e gerar perturbações cosmológicas compatíveis com os vínculos cosmológicos da CMB, de estruturas de grande escala e da nucleossíntese primordial. Este requerimentos são independentes entre si e devem ser investigados separadamente. Para uma teoria $f(R)$ ser completamente viável, todos eles devem ser satisfeitos. É importante enfatizar, no entanto, que não temos por objetivo nesta tese investigar a completa viabilidade do formalismo de Palatini e não iremos tratar das questões de viabilidade relacionadas com as perturbações e formação de estruturas. Iremos nos focar apenas na história da expansão cósmica que alguns modelos $f(R)$ no formalismo de Palatini predizem e sua compatibilidade com as observações atuais.

4.7. Problemas no formalismo de Palatini

Antes de iniciarmos a discussão sobre a viabilidade de alguns modelos $f(R)$ nos próximos capítulos, vamos fazer mais algumas considerações sobre o formalismo de Palatini. Um ponto positivo deste formalismo é que as equações de campo de segunda ordem na métrica não sofre com a instabilidade de Dolgov-Kawasaki associada com o sinal negativo de f_{RR} (Sotiriou 2007). Para entendermos como este tipo de instabilidade pode ocorrer no formalismo métrico, vamos

seguir Sotiriou (2009) e parametrizar desvios da RG como

$$f(R) = R + \epsilon\varphi(R), \quad (4.70)$$

onde φ é uma função adimensional e o valor do parâmetro ϵ tem dimensões de massa ao quadrado e deve ser muito pequeno, o que é necessário para as teorias consideradas aqui reproduzirem a dinâmica cosmológica correta. Substituindo a forma funcional acima na Eq. (4.9) nós obtemos

$$\square R + \frac{\varphi_{RRR}}{\varphi_{RR}} \nabla^\alpha R \nabla_\alpha R + \frac{\epsilon\varphi_R - 1}{3\epsilon\varphi_{RR}} R = \frac{\kappa T}{3\epsilon\varphi_{RR}} + \frac{2\varphi}{3\varphi_{RR}}, \quad (4.71)$$

onde assumimos $\varphi_{RR} \neq 0$. Vamos agora aproximar localmente a métrica e a curvatura em uma pequena região do espaço-tempo, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (4.72)$$

$$R = -\kappa T + R_1 \quad (4.73)$$

$$(4.74)$$

onde a métrica $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e a perturbação na curvatura obedece a condição $|R_1/\kappa T| \ll 1$. Nesta aproximação, considerando apenas a primeira ordem em R_1 , a Eq. (4.71) fornece

$$\begin{aligned} \ddot{R}_1 - \nabla^2 R_1 - \frac{2\kappa\varphi_{RRR}}{\varphi_{RR}} \dot{T} \dot{R}_1 + \frac{2\kappa\varphi_{RRR}}{\varphi_{RR}} \text{grad}(T) \cdot \text{grad}(R_1) + \frac{1}{3\varphi_{RR}} \left(\frac{1}{\epsilon} - \varphi_R \right) R_1 \\ = \kappa \ddot{T} - \kappa \nabla^2 T - \frac{\kappa T \varphi_R + 2\varphi}{3\varphi_{RR}}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

onde $\text{grad}()$ e ∇^2 representam o gradiente e o Laplaciano no espaço Euclidiano tridimensional, respectivamente. A função $\varphi(R)$ e suas derivadas são calculadas em $R = -\kappa T$. O coeficiente do último termo do lado esquerdo é uma massa efetiva ao quadrado. Devido ao pequeno valor de ϵ , esta massa é dominada pelo termo $1/(3\epsilon\varphi_{RR})$. Com isto, o modo escalar R_1 da teoria será estável se sua massa efetiva for positiva, ou seja, $\varphi_{RR} = f_{RR} > 0$, e instável se $\varphi_{RR} = f_{RR} < 0$. Esta instabilidade pode ser considerada como uma instabilidade no setor de gravidade (Faraoni 2006). Por aparecer nas equações que governam a dinâmica do escalar de curvatura, ela também é conhecida como *instabilidade do escalar de curvatura*.

No caso do formalismo de Palatini, nós podemos ver que, como a Eq. (4.42) fornece uma relação algébrica entre \mathcal{R} e T , se invertermos a relação (4.52) e expressarmos o escalar de Ricci R em função do escalar de Ricci generalizado \mathcal{R} iremos notar que o escalar de Ricci R da métrica $g_{\mu\nu}$ pode ser expresso diretamente em função do traço do tensor energia-momento T , o que indica que ele não carrega nenhuma dinâmica. Com isto, nenhuma instabilidade pode ocorrer neste formalismo. De fato, a instabilidade de Dolgov-Kawasaki está estritamente relacionada com o grau de liberdade escalar extra do formalismo métrico.

Embora possua esta vantagem em comparação com o formalismo métrico, o formalismo de Palatini não está livre de problemas. Flanagan (2004a,b) demonstrou que, se a energia escura e a matéria não-relativística são fortemente acopladas, surgem correções não-perturbativas na ação da matéria, o que leva este formalismo a um conflito com o modelo padrão da física de partículas. Este acoplamento também implica na incompatibilidade entre modelos de aceleração

baseados no formalismo de Palatini e as observações de estrutura de grande escala, sendo que a solução para este problema é garantir que o desvio entre o modelo $f(R)$ neste formalismo e o modelo Λ CDM seja pequeno (Li & Chu 2006, Tsujikawa et al. 2008).

Existe também uma quantidade significativa de trabalhos sobre o limite Newtoniano de teorias $f(R)$ no formalismo de Palatini (veja, por exemplo, Olmo 2005). Dominguez & Barraco (2004) argumentaram que modelos $f(R)$ com uma singularidade de ordem n^{\S} em $R = 0$ e com $f_{RR}(R_0) \neq 0$ (onde R_0 é o escalar de Ricci no *background*) não fornecem o limite Newtoniano correto. No entanto, este resultado contrasta com o obtido por Meng & Wang (2004a), na qual o limite Newtoniano é sempre possível neste formalismo, o que também está de acordo com os argumentos de Sotiriou (2006c), que investigou modelos do tipo lei-de-potência e concluiu que o limite Newtoniano é obtido desde que os coeficientes das potências de R sejam pequenos.

Além dos problemas mencionados acima, a natureza não-dinâmica do campo escalar também é fonte de mais deficiências da formulação de Palatini. Em particular, foi mostrado por Barausse et al. (2008a,b) que esta natureza do campo escalar pode levar a uma divergência no escalar de Ricci na superfície de um objeto compacto estático e esfericamente simétrico com equação de estado politrópica $p = c\rho_0^\Gamma$ e $3/2 < \Gamma < 2$ (onde p é a pressão e ρ_0 é a densidade de massa de repouso). Este problema está relacionado com a natureza algébrica da relação (4.42) (De Felice & Tsujikawa 2010a). Além disso, Barausse et al. (2008a) argumentam que o surgimento desta singularidade não se restringe a um modelo específico de $f(R)$. Existem, contudo, estudos que contestam as afirmações acima. Kainulainen et al. (2007) e Olmo (2008), por exemplo, reexaminaram este problema e concluíram que estas singularidades podem ter origem nas particularidades da equação de estado politrópica (por exemplo, seu regime natural de validade) e no modelo $f(R)$ escolhido. Por fim, também é conhecido que no formalismo de Palatini o problema do valor inicial, ou *problema de Cauchy* (Wald 1984), não é bem formulado devido à presença de derivadas de alta ordem dos campos de matéria nas equações de campo da teoria (Lanahan-Tremblay & Faraoni 2007). Os estudos de Capozziello & Vignolo (2009a,b) e Olmo & Sanchis-Alepuz (2011), no entanto, contrariam estas descobertas e advogam que este tema ainda necessita de muita investigação.

Todos os problemas mencionados acima evidenciam o amplo debate a respeito da viabilidade das teorias $f(R)$ no formalismo de Palatini. Eles também sinalizam que qualquer investigação que faça uso deste formalismo certamente ajudará a clarificar as questões expostas aqui. Elas, por enquanto, permanecem em aberto.

4.8. Sumário

Neste capítulo realizamos uma breve revisão das teorias $f(R)$. Procuramos enfatizar os aspectos mais gerais desta classe de teorias no contexto dos formalismos variacionais métrico e de Palatini. Também apresentamos os problemas e as consequências do formalismo de Palatini, uma vez que a viabilidade deste formalismo no cenário cosmológico é o foco central desta tese. Este capítulo finaliza a primeira parte deste texto, cuja a proposta foi inserir as motivações e os conceitos teóricos necessários ao entendimento dos trabalhos realizados. A próxima parte trata dos

[§] $n \in \mathbb{N}$.

aspectos relacionados aos testes de viabilidade realizados em nossos trabalhos. Diante disto, nos próximos capítulos introduziremos os modelos $f(R)$ estudados e discutiremos os resultados de nossa investigação observacional desses modelos no formalismo de Palatini.

Parte II.

ASPECTOS OBSERVACIONAIS

5 Consequências cosmológicas de gravidade $f(R)$ exponencial

Resumo: *Um modelo cosmológico a partir de uma gravidade $f(R)$ exponencial é introduzido. Algumas de suas consequências observacionais são apresentadas. Os resultados de nossas análises sobre a viabilidade deste modelo no formalismo de Palatini são discutidos.*

5.1. O modelo

A possibilidade da aceleração cósmica atual ser explicada pelas teorias $f(R)$ foi primeiro sugerida no formalismo métrico por Capozziello (2002). Após isto, diversos modelos que satisfazem as condições de viabilidade descritas na seção 4.6 têm surgido como alternativas viáveis à energia escura (Amendola et al. 2007a, Amendola & Tsujikawa 2008, Appleby & Battye 2007, Hu & Sawicki 2007, Li & Barrow 2007, Starobinsky 2007, Tsujikawa 2008).

Com o objetivo de investigar as previsões de teorias $f(R)$ sobre o efeito Sachs–Wolfe Integrado (ISW), Zhang (2006) introduziu o modelo

$$f(R) = R - \lambda_1 H_0^2 e^{-R/\lambda_2 H_0^2}, \quad (5.1)$$

onde $\lambda_{1,2}$ são constantes adimensionais positivas. Para este modelo, um efeito Sachs–Wolfe detectável pode ser reproduzido em $z \gtrsim 3$. Desde então, tem havido um crescente interesse na classe de modelos de gravidade $f(R)$ semelhantes à Eq. (5.1) (ver, por exemplo, Cognola et al. (2008), Linder (2009), Bamba et al. (2010), Yang et al. (2010) e referências lá contidas).

Mais tarde, Cognola et al. (2008) estudou formas funcionais que tornam-se uma constante cosmológica a partir de um determinado valor do escalar de Ricci. Uma das formas investigadas possuía um comportamento exponencial do tipo

$$f(R) = R + \alpha(e^{-bR} - 1) \quad (5.2)$$

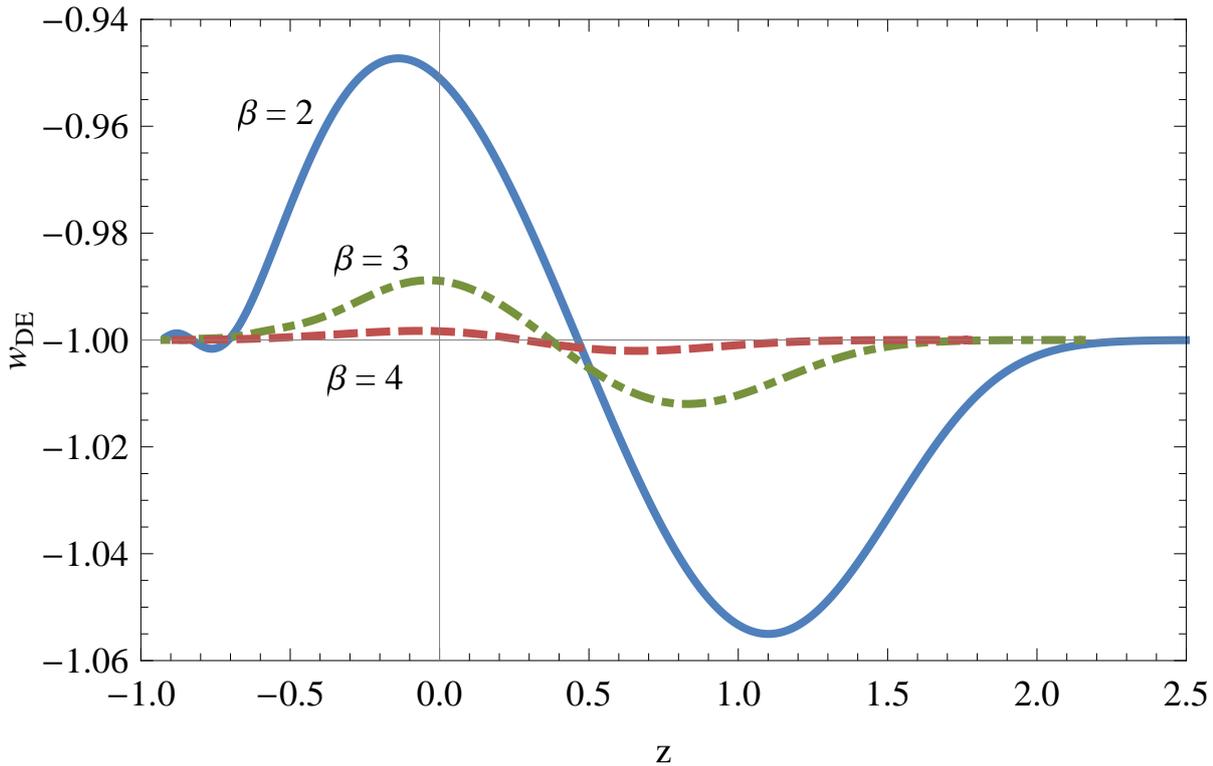


Figura 5.1.: Evolução da equação de estado relacionada com a modificação na gravidade para o modelo exponencial. As curvas correspondem aos pares $(\beta, \Omega_{m0}) = (2; 0,274)$, $(\beta, \Omega_{m0}) = (3; 0,276)$ e $(\beta, \Omega_{m0}) = (4; 0,276)$. Figura reproduzida de Yang et al. (2010).

que possui o caso Λ CDM ($f \rightarrow R + \text{constante}$) como limite assintótico para altos valores de R . Quando $R \rightarrow 0$, a constante cosmológica é suprimida. Algumas condições de viabilidade desta classe de modelos foram investigadas por Bamba et al. (2010).

Recentemente, Linder (2009) propôs a seguinte forma funcional:

$$f(R) = R - \beta R_s (1 - e^{-R/R_s}) \quad (5.3)$$

Na expressão acima, β é um parâmetro livre da teoria e R_s corresponde à escala de curvatura na qual, a partir dela, os efeitos da aceleração da expansão cósmica se tornam relevantes. Este modelo se aproxima do caso Λ CDM à medida em que β se torna grande uma vez que, no formalismo métrico, é possível mostrar que $R_s = 6(1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0})/\beta$, de forma que o termo exponencial tende a zero para grandes valores de β . Esta expressão para R_s pode ser encontrada tomando o limite assintótico da Eq. (4.15) para altos *redshifts*. Neste caso, o desvio deste modelo para o caso Λ CDM é pequeno, já que neste regime (altas curvaturas) as correções devido à curvatura são desprezíveis e a exponencial vai a zero. Com isto, a Eq. (4.15) para este modelo se reduz à equação de Friedmann (2.76) para $\Omega_k = 0$ e com $\Omega_\Lambda = (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0}) = \beta R_s/6$.

Em um trabalho recente, Yang et al. (2010) realizaram uma análise observacional do modelo (5.3). A Fig. 5.1 mostra algumas curvas obtidas pelos autores para três valores de β e Ω_{m0} . Podemos ver que o modelo (5.3) se aproxima ligeiramente do caso Λ CDM ($w_{DE} = -1$) para $\beta > 4$. Comparando as previsões deste modelo com dados de SNs Ia, BAO e CMB, os autores encontraram um limite inferior para β em 1,27. Não foi encontrado, contudo, qualquer limite superior. Isto permite a compatibilidade deste modelo com o caso Λ CDM ($\beta \rightarrow \infty$). É importante notar, no entanto, que todas estas análises listadas até aqui para o modelo exponencial

foram realizadas utilizando-se o formalismo métrico. No que segue, descreveremos nossa investigação sobre as consequências cosmológicas de uma teoria $f(R)$ exponencial no formalismo de Palatini.

5.2. Metodologia

Nós adotamos o seguinte modelo:

$$f(R) = R - \alpha n H_0^2 \left(1 - e^{-R/\alpha H_0^2}\right). \quad (5.4)$$

Duas equações necessárias para este estudo são a primeira e segunda derivadas da função acima com relação ao escalar de Ricci,

$$f_R(R) = 1 - n e^{-R/\alpha H_0^2} \quad (5.5)$$

$$f_{RR}(R) = \frac{n}{\alpha H_0^2} e^{-R/\alpha H_0^2}. \quad (5.6)$$

Note que, a despeito da simbologia dos parâmetros, este modelo é o mesmo da Eq. (5.3), onde n faz o papel de β e α corresponde à R_s . Observe ainda que o caso Λ CDM é o limite deste modelo no regime $R \gg \alpha H_0^2$. No regime $R \ll \alpha H_0^2$, a Relatividade Geral sem constante cosmológica é recuperada. Como já deve ter sido observado, por questão de conveniência, abandonamos a notação \mathcal{R} para o escalar de Ricci criado a partir da conexão independente da métrica e passamos a utilizar a notação padrão R .

Assumindo um universo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica FLRW plana (2.31), sabemos que a equação de Friedmann no formalismo de Palatini é dada pelas Eqs. (4.58) e (4.59). Outra relação pertinente em nosso estudo é a equação do traço das equações de campo, dada por (4.42). É útil reescrevermos estas equações em termos dos parâmetros de densidade. Assim, temos

$$H(a) = H_0 \left[\frac{3\Omega_{m0}a^{-3} + 6\Omega_{r0}a^{-4} + \frac{f}{H_0^2}}{6f_R\xi^2} \right]^{1/2}, \quad (5.7)$$

onde

$$\xi = 1 + \frac{9}{2} \frac{f_{RR}}{f_R} \frac{H_0^2 \Omega_{m0} a^{-3}}{f_{RR} R - f_R}, \quad (5.8)$$

e também

$$f_R R - 2f = -3H_0^2 \Omega_{m0} a^{-3}. \quad (5.9)$$

Uma característica interessante do formalismo de Palatini é que, como existem duas equações que vinculam as soluções do nosso problema (as Eqs. (5.7) e (5.9)), podemos utilizar uma delas para eliminarmos um parâmetro do nosso modelo. De fato, se utilizarmos a Eq. (5.9) em $z = 0$, poderemos escrever o parâmetro n em função dos outros parâmetros como

$$n = \frac{R_0 - 3H_0^2 \Omega_{m0}}{2\alpha H_0^2 (1 - e^{-R_0/\alpha H_0^2}) - e^{-R_0/\alpha H_0^2} R_0}, \quad (5.10)$$

com o custo adicional do surgimento de um novo parâmetro, R_0 , que é o valor do escalar de Ricci em $z = 0$. Este novo parâmetro poderia, a princípio, ser obtido em termos dos outros parâmetros da teoria pela substituição da Eq. (5.10) na Eq. (5.7) em $z = 0$. Este procedimento nos daria, para o modelo aqui descrito, R_0 em função de Ω_{m0} e α , fazendo restar ao problema apenas dois parâmetros. No caso do modelo descrito aqui, este procedimento fornece uma expressão muito complicada para R_0 e não foi utilizado nas análises deste modelo. No trabalho discutido neste capítulo utilizamos todos os três parâmetros originais do modelo (5.4) no formalismo de Palatini (Ω_{m0}, α, n) e o valor do escalar de Ricci a ser colocado na Eq. (5.7) para qualquer z foi obtido diretamente da raiz da Eq. (5.9). Discutiremos mais sobre esta questão no capítulo 6. Aqui, o surgimento da Eq. (5.10) serve para mostrar que a condição $R \gg \alpha H_0^2$ (quando o modelo se aproxima de Λ CDM) implica em altos valores de n . É importante dizer ainda que, em nossas análises, nós impomos a positividade do acoplamento gravitacional efetivo $\kappa/f_R(R) > 0$ (condição 2 da seção 4.6), evitando assim, uma anti-gravidade. Isto conduz à restrição $n < \exp(R/\alpha H_0^2)$.

Para testarmos a viabilidade observacional deste cenário exponencial (5.4), nós realizamos uma análise estatística de χ^2 , (descrita no apêndice B.1) utilizando o conjunto de SNs Ia Union2 (Amanullah et al. 2010), juntamente com 11 determinações da taxa da expansão cósmica $H(z)$ (Stern et al. 2010) (veja o apêndice A.2 para uma descrição desses dados). Em todas as análises realizadas, nós fixamos o parâmetro de densidade de radiação em $\Omega_{r0} = 5 \times 10^{-5}$. Com isto, o conjunto completo de parâmetros livres para este modelo é $\mathbf{P} \equiv (\Omega_{m0}, n, \alpha)$.

Com o objetivo de impor restrições quantitativas se reduz a dados de $H(z)$ no modelo de gravidade exponencial dado pela equação (5.4), nós minimizamos a função

$$\chi_H^2 = \sum_{i=1}^{N_H} \frac{[H^{(\text{teo})}(z_i|\mathbf{P}) - H^{(\text{obs})}(z_i)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (5.11)$$

onde $H^{(\text{teo})}(z_i|\mathbf{P})$ é o valor teórico do parâmetro de Hubble em z_i , dado pela Eq. (5.7), e σ_i é a incerteza para cada uma das $N_H = 11$ determinações de $H^{(\text{obs})}(z_i)$ obtidas de Stern et al. (2010). Em nossas análises, nós adicionamos a essa amostra de $H(z)$ uma estimativa do valor da constante de Hubble, $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, fornecida pelos resultados do HST (Freedman et al. 2001). A partir da função χ_H^2 acima, nós construímos a função de probabilidade $\mathcal{L} \propto \exp(-\chi_H^2/2)$ e derivamos os intervalos de confiança de 68,3%, 95,4% e 99,73% para os parâmetros Ω_{m0} , n e α .

Para o testes estatístico envolvendo SNe Ia, assim como no teste de $H(z)$, nós estimamos o melhor ajuste para o conjunto de parâmetros \mathbf{P} utilizando a estatística de χ^2 , com

$$\chi_{\text{SN}}^2 = \sum_{i=1}^{N_{\text{SN}}} \frac{[\mu^{(\text{teo})}(z_i|\mathbf{P}) - \mu^{(\text{obs})}(z_i)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (5.12)$$

onde, para o conjunto de SNs Ia utilizado temos $N_{\text{SN}} = 557$.

Finalmente, nós também realizamos uma análise combinada dos dados de $H(z)$ e SNs Ia, através da minimização da seguinte quantidade:

$$\chi_T^2 = \chi_H^2 + \chi_{\text{SN}}^2. \quad (5.13)$$

Em todas as análises, nós realizamos uma marginalização numérica sobre a constante de Hubble H_0 . Para mais detalhes acerca deste processo, veja o apêndice B.2.

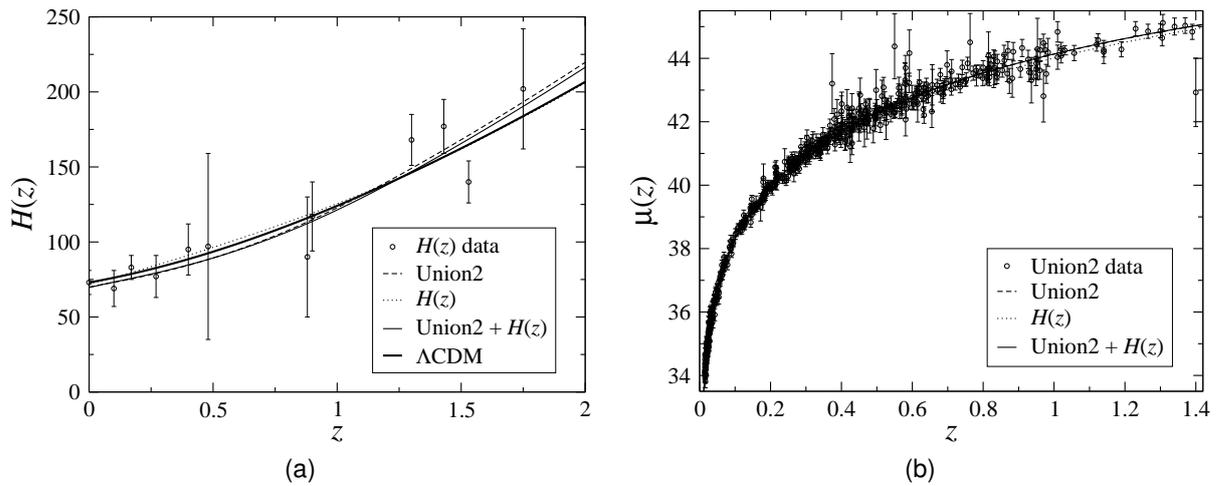


Figura 5.2.: (a) Estimativas do parâmetro de Hubble $H(z)$ como função do *redshift* obtidos em Stern et al. (2010); (b) Diagrama de Hubble para as 557 SNs Ia do conjunto Union2 (Amanullah et al. 2010). Em ambas as figuras, as curvas correspondem aos valores de melhor ajuste dos parâmetros do modelo exponencial no formalismo de Palatini (Ω_{m0}, n, α), obtidos a partir de nossas análises envolvendo dados de $H(z)$, SNs Ia e $H(z)$ + SNs Ia. Estes valores são mostrados na tabela 5.1. Em (a), para efeitos de comparação, o modelo Λ CDM plano com $\Omega_{m0} = 0,27$ também é mostrado.

Tabela 5.1.: Valores de melhor ajuste e intervalos de confiança de 68,3%, 95,4% e 99,73% para os parâmetros do modelo $f(R)$ exponencial.

Teste	Ω_{m0}	n	α	χ_r^2
$H(z)$	0,27 ^{+0,03 +0,07 +0,10} -0,03 -0,06 -0,09	1,56 ^{+0,41 +0,77 +1,13} -0,56 -1,14 -1,21	2,56 ^{+0,53 +1,09 +1,69} -0,49 -0,94 -1,34	0,84
SNs Ia	0,33 ^{+0,005 +0,01 +0,02} -0,003 -0,01 -0,02	0,60 ^{+0,23 +0,26 +0,28} -0,01 -0,02 -0,04	1,48 ^{+0,02 +0,03 +0,05} -0,01 -0,03 -0,04	0,97
$H(z)$ + SNs Ia	0,32 ^{+0,004 +0,01 +0,02} -0,003 -0,01 -0,01	0,56 ^{+0,007 +0,36 +0,38} -0,003 -0,01 -0,02	1,56 ^{+0,02 +0,04 +0,06} -0,01 -0,03 -0,05	0,97

5.3. Resultados e discussão

A Fig. 5.2 mostra os dados observacionais de $H(z)$ obtidos de Stern et al. (2010) e o diagrama de Hubble para as supernovas do Union2 (veja Amanullah et al. (2010) para mais detalhes). Ela também mostra a evolução teórica do parâmetro de Hubble $H(z)$ dado pela Eq. (5.7) e do módulo de distância $\mu(z)$ dado pela Eq. (A.4) como função do *redshift* para os valores de melhor ajuste de Ω_{m0} , n , e α . Para efeitos de comparação, o modelo Λ CDM com $\Omega_{m0} = 0,27$ também é mostrado na Fig. 5.2a (linha espessa). Note que todos os modelos parecem ser capazes de reproduzir razoavelmente bem tanto as medições de $H(z)$ quanto as de SNs Ia. Observe também que, por $H(z)$ ser uma medida mais direta da teoria subjacente do que o módulo de distância $\mu(z)$, esta medida é mais sensível à variação dos parâmetros da teoria. Isto pode ser visto na Fig. 5.2, observando-se a discrepância entre as curvas das duas figuras.

Os intervalos de confiança de 68,3%, 95,4% e 99,73% para os parâmetros Ω_{m0} , n e α são mostrados na tabela 5.1. Os valores de melhor ajuste encontrados a partir da análise envolvendo $H(z)$ foram $\Omega_{m0} = 0,27$, $n = 1,56$ e $\alpha = 2,56$. Como esperado, devido às grandes incertezas at-

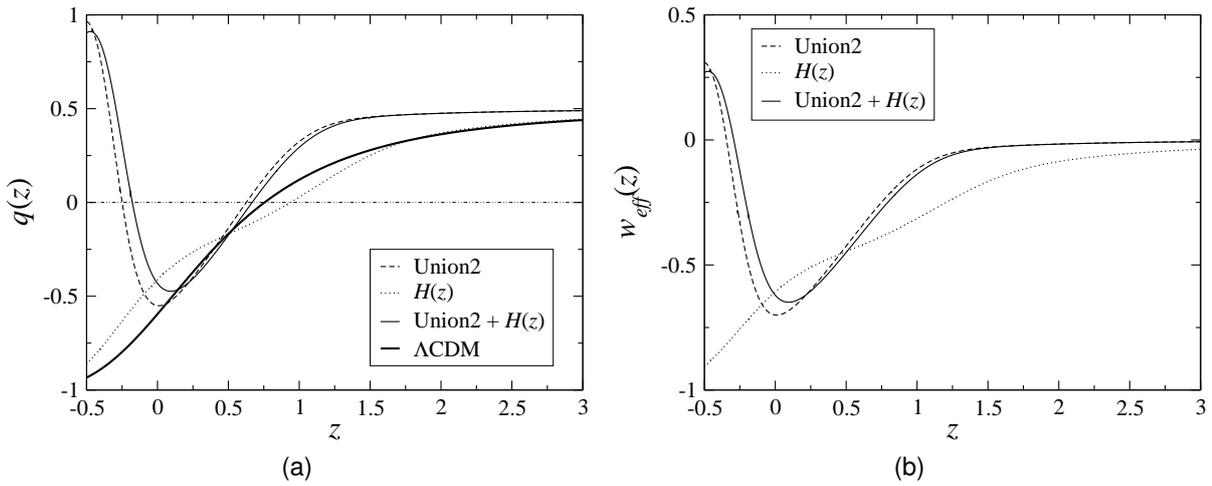


Figura 5.3.: (a) Evolução do parâmetro de desaceleração $q(z)$ como função do *redshift* para o modelo de gravidade exponencial no formalismo de Palatini. Note que para algumas combinações de parâmetros a aceleração cósmica é um fenômeno transiente. O modelo Λ CDM, cuja a aceleração cósmica prevista é eterna, também é mostrado para efeito de comparação; (b) Evolução do parâmetro da equação de estado efetiva para o mesmo modelo. Assim como na Fig. 5.2, em ambas as figuras, as curvas correspondem aos valores de melhor ajuste de Ω_{m0} , n e α obtidos a partir de nossas análises envolvendo dados de $H(z)$, SNs Ia e $H(z) +$ SNs Ia. Estes valores são mostrados na tabela 5.1.

uais nas medidas de $H(z)$, podemos ver claramente que esses dados sozinhos não fornecem restrições para os valores de n e α menores do que os dados de SNs Ia. Para a análise de SNs Ia, os valores de melhor ajuste são $\Omega_{m0} = 0,33$, $n = 0,60$ e $\alpha = 1,48$ com $\chi_r^2 \equiv \chi_{\text{min}}^2/\nu \simeq 0,97$ (onde ν é o número de graus de liberdade e é descrito no apêndice B.1). Note que os intervalos são agora consideravelmente menores do que os obtidos a partir da análise de $H(z)$ descritos acima, o que reflete o maior poder de restrição dos dados de SNs Ia quando comparados com a amostra atual de $H(z)$. Os valores de melhor-ajuste para esta análise são $\Omega_{m0} = 0,32$, $n = 0,56$ e $\alpha = 1,56$ com $\chi_r^2 \simeq 1$. No nível de confiança de 95,4%, nós encontramos $0,31 \leq \Omega_{m0} \leq 0,33$, $0,55 \leq n \leq 0,92$ e $1,53 \leq \alpha \leq 1,60$. Para a análise combinada $H(z) +$ SNs Ia, os valores de melhor ajuste foram $\Omega_{m0} = 0,32$, $n = 0,56$ e $\alpha = 1,56$ com $\chi_r^2 \simeq 1,0$. No nível de confiança de 95,4%, nós encontramos $0,31 \leq \Omega_{m0} \leq 0,33$, $0,55 \leq n \leq 0,92$ e $1,53 \leq \alpha \leq 1,60$ (veja Tabela 5.1).

5.3.1. História cósmica

Fischler et al. (2001), Hellerman et al. (2001) e Cline (2001) apontaram um possível conflito entre uma expansão cósmica eternamente acelerada e nosso melhor candidato para uma teoria quântica da gravidade, ou seja, a teoria de cordas. A razão para este conflito é que a única formulação conhecida da teoria de cordas é descrita em termos de matrizes S , as quais exigem estados de *in* e *out* infinitamente separados e não-interagentes. Devido ao horizonte,

$$\Delta_h = \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a(t)}, \quad (5.14)$$

um universo eternamente acelerado se comporta como uma “caixa” de volume finito no qual não existem estados isolados (Halyo (2001) fornece uma discussão mais detalhada sobre este assunto).

Como é bem conhecido, no cenário padrão Λ CDM o universo irá assintoticamente se tornar um espaço de Sitter, que tem um horizonte de eventos cosmológico Δ_h com a física confinada a uma região finita. Neste sentido, uma característica interessante da gravidade $f(R)$ exponencial discutida neste trabalho é a possibilidade de uma aceleração cósmica transiente com $\Delta_h \rightarrow \infty$ e, portanto, a sua compatibilidade com a restrição teórica da teoria de cordas. Para estudar este fenômeno, vamos considerar o parâmetro de desaceleração dado pela Eq. (2.73), com $H(z)$ dado pela Eq. (5.7).

A Fig. 5.3a mostra a evolução de $q(z)$ para os três conjuntos de valores de melhor ajuste obtidos nas análises estatísticas realizadas ($H(z)$, SNs Ia e $H(z) + \text{SNs Ia}$). Como pode ser visto a partir desta figura, para algumas combinações de parâmetros, a expansão cósmica foi desacelerada no passado, mudou para a atual fase de aceleração em $z \simeq 1$ e irá, eventualmente, desacelerar novamente no futuro. Para estes conjuntos de parâmetros, é possível mostrar que $\Delta_h \rightarrow \infty$, minizando assim o potencial conflito teórico e observacional discutido acima. Vale a pena enfatizar que este tipo de comportamento dinâmico não é encontrado na maior parte das cosmologias $f(R)$ discutidas na literatura (Pires et al. 2010), sendo essencialmente uma característica dos chamados potenciais de quintessência híbrida (Carvalho et al. 2006, Alcaniz et al. 2009), algumas classes de modelos de quintessência acoplada (Costa 2010, Costa & Alcaniz 2010) e cenários de branas (Sahni & Shtanov 2000). Ainda com relação à Fig. 5.3a, observe que as curvas para os valores encontrados em nossas análises não se aproximam da curva para o modelo Λ CDM. Como pode ser notado, isto só ocorre em altos *redshifts*. Esta discrepância pode ser explicada pelos valores de melhor ajuste da tabela 5.1, levando-se em conta a discussão anterior sobre a Eq. (5.10).

Um outro aspecto relevante a ser discutido concerne a existência das eras cósmicas. Amendola et al. (2007b) mostraram que cosmologias $f(R)$ no formalismo métrico não podem produzir uma era dominada pela matéria seguida por uma expansão acelerada (embora Capozziello et al. (2006b) contrarie esta conclusão). Para verificar se este comportamento indesejável ocorre também para o modelo exponencial no formalismo de Palatini, podemos derivar uma equação de estado efetiva em função do *redshift*, da mesma forma que fizemos na seção 4.1.3, isto é,

$$w_{\text{ef}} = -1 + \frac{2(1+z)}{3H} \frac{dH}{dz}. \quad (5.15)$$

Na Fig. 5.3b nós mostramos a evolução da equação de estado efetiva acima para os valores de melhor ajuste mostrados na tabela 5.1. Note que, para algumas dessas combinações de parâmetros (basicamente aquelas derivadas a partir dos dados de SNs Ia), o universo passou por uma fase dominada pela matéria ($w_{\text{ef}} = 0$) antes de mudar para a fase de aceleração recente ($w_{\text{ef}} < 0$). Em particular nós notamos que, para os valores de melhor ajuste derivados a partir da análise conjunta $H(z) + \text{SNs Ia}$, parece existir uma evidência de que a aceleração cósmica está diminuindo o seu ritmo, o que de alguma forma está de acordo com os resultados de Shafieloo et al. (2009) para algumas parametrizações da energia escura. A partir dos resultados mostrados na Fig. 5.3b, vemos claramente que as conclusões de Amendola et al. (2007b) sobre o comportamento de w_{ef} na abordagem métrica parecem não se aplicar ao formalismo Palatini, pelo menos

para a teoria de gravidade exponencial estudada aqui e nos intervalos dos parâmetros Ω_{m0} , n e α fornecidos por nossas análises.

5.4. Sumário

Neste capítulo nós introduzimos o modelo $f(R)$ exponencial e investigamos suas consequências cosmológicas à luz dos dados observacionais da taxa de expansão cósmica e de SNs Ia. No que diz respeito à evolução passada do Universo, nós mostramos que, para os melhores ajustes encontrados para os parâmetros do modelo (Ω_{m0}, α, n) , uma era dominada pela matéria é seguida pela fase de aceleração atual. Isto está de acordo com uma das condições de viabilidade apresentadas na seção 4.6, em que uma sequência definida de dominação pela radiação-matéria-aceleração deve ocorrer. Outra característica interessante desta classe de modelos no formalismo de Palatini é a possibilidade de uma aceleração cósmica transiente, que pode levar o Universo a uma nova era dominada pela matéria no futuro. Este resultado particular parece estar de acordo com as exigências atuais de teoria das cordas e da teoria M. Os resultados apresentados neste capítulo representam uma contribuição original à literatura e foram publicados por Campista et al. (2011). No próximo capítulo, investigaremos as consequências cosmológicas do modelo de Hu–Sawicki no formalismo de Palatini.

6 Cosmologia de Hu–Sawicki no formalismo de Palatini

Resumo: *Um modelo cosmológico a partir da gravidade $f(R)$ de Hu–Sawicki no formalismo de Palatini é introduzido. Algumas de suas consequências observacionais são apresentadas e os resultados obtidos de nossas análises sobre a viabilidade deste modelo são apresentados.*

6.1. O modelo

Vimos na seção 4.6 que uma das condições de viabilidade para um modelo $f(R)$ ser considerado viável é $|f_R - 1| \sim 0$ no Universo recente, o que implica em $|f_{R0} - 1| \sim 0$ (com f_{R0} sendo o valor de f_R em $z = 0$). Esta condição é necessária para o sucesso de um modelo $f(R)$ em testes do Sistema Solar. Com esta finalidade, Hu & Sawicki (2007) propuseram o seguinte *ansatz* no formalismo métrico:

$$f(R) = R - m^2 \frac{c_1 \left(\frac{R}{m^2}\right)^n}{c_2 \left(\frac{R}{m^2}\right)^n + 1}, \quad (6.1)$$

onde $n > 0$, c_1 e c_2 são parâmetros adimensionais e $m^2 = H_0^2 \Omega_{m0}$. Para $n = 1$, a equação acima pode ser reescrita como (Schmidt et al. 2009)

$$f(R) = R - \frac{2\Lambda}{\frac{\mu^2}{R} + 1}, \quad (6.2)$$

onde $\Lambda = m^2 c_1 / 2c_2$ and $\mu^2 = m^2 / c_2$. No regime $R \gg \mu^2$, esse modelo é praticamente indistinguível do cenário Λ CDM*. Iremos, quando for pertinente, nos referir ao modelo (6.1) com a sigla HS.

* Como mostrado em Schmidt et al. (2009), isso é equivalente a ter $|f_{R0}| \sim 1$.

O sinal do segundo termo da $f(R)$ acima (o termo de correção) foi escolhido de tal forma que, no regime $R \gg m^2$ temos $f_{RR} > 0$, o que assegura a estabilidade de perturbações em altas curvaturas (Song et al. 2007). Este modelo foi construído para satisfazer também as condições (4.68) e (4.69). Com isto, ele permite a existência da fenomenologia exibida em testes cosmológicos, galácticos e do Sistema Solar.

Existem algumas características interessantes acerca deste modelo. Uma delas é que, assim como o que ocorre para o modelo exponencial, a constante cosmológica não pode ser recuperada a partir de escolhas particulares dos parâmetros do modelo. No entanto, no regime $R \gg m^2$, o modelo pode ser expandido em m^2/R como

$$\lim_{m^2/R \rightarrow 0} f(R) \approx R - \frac{c_1}{c_2} m^2 + \frac{c_1}{c_2^2} m^2 \left(\frac{m^2}{R} \right)^n, \quad (6.3)$$

de forma que, para qualquer valor fixo da razão c_1/c_2 , c_1/c_2^2 implica no surgimento de uma constante cosmológica como caso limite em altas curvaturas. Outro ponto importante é que é possível mostrar que, para valores viáveis de c_1 e c_2 , o escalar de Ricci não decresce indefinidamente (Hu & Sawicki 2007). Ao invés disso, este congela em um valor fixo, levando o modelo a mimetizar assintoticamente a constante cosmológica.

Vamos discutir um pouco mais a respeito de como este modelo se torna viável em testes de Sistema Solar. No frame de Einstein, mencionado na seção 4.4, todas as modificações na gravidade estão codificadas no campo escalar $\phi = f_R$, que é acoplado à matéria, introduzindo assim, uma “quinta força” que depende da massa do campo escalar m_{f_R} . Como esta força não é detectada em testes do Sistema Solar, nós precisamos produzir um alcance curto o suficiente para evitar sua detecção, o que exige que o campo seja muito massivo. Por outro lado, uma vez que o campo deve afetar a evolução do Universo como um todo, sua massa deve ser baixa o suficiente para permitir que a quinta força atue sobre a expansão. Como já mencionamos anteriormente nas seções 3.4.2 e 4.5, o mecanismo camaleão é fundamental para este problema ser resolvido, uma vez que ele produz uma quinta força de curto alcance em ambientes densos, onde os testes locais são realizados, enquanto que em densidades cosmológicas o alcance do campo é longo e sua massa é baixa. O modelo HS faz uso deste mecanismo, o que o torna apto a passar em testes do Sistema Solar mesmo com um limite $|f_{R0}| < 1,1$, o que está bem acima do limite imposto pela condição 3 listada na seção 4.6.

Após o trabalho de Hu & Sawicki (2007), um número razoável de restrições cosmológicas e astrofísicas no cenário HS no formalismo métrico foram realizadas (veja, por exemplo, Oy-aizu et al. 2008, Martinelli 2009, Martinelli et al. 2009, Lombriser et al. 2012, Ferraro et al. 2011, Gil-Marin et al. 2011, Li et al. 2011). No entanto, há uma completa falta de estudos sobre o mecanismo desta proposta na aproximação de Palatini. Neste capítulo, iremos propor o *ansatz* HS no formalismo de Palatini, o que nos leva a equações de campo diferentes daquelas que surgem no formalismo métrico e faz de nossa escolha uma nova teoria de gravidade. A seguir, apresentaremos nossa metodologia para, após isso, discutirmos nossos resultados e as consequências cosmológicas do cenário proposto.

6.2. Metodologia

Nesta seção iremos apresentar as equações relevantes para o modelo HS (6.1) no formalismo de Palatini. Há de se dizer, no entanto, que em nossas análises o parâmetro $n = 1$ se mostrou completamente degenerado (não encontramos limites sobre ele). Deste modo, sem perda de generalidade, iremos nos ater ao caso particular $n = 1$. Com isto, o modelo e suas primeira e segunda derivadas são

$$f_R(R) = R - \frac{c_1 R}{c_2 \frac{R}{m^2} + 1} \quad (6.4)$$

$$f_R(R) = 1 - \frac{c_1}{\left(c_2 \frac{R}{m^2} + 1\right)^2} \quad (6.5)$$

$$f_{RR}(R) = \frac{2c_1 c_2}{\left(c_2 \frac{R}{m^2} + 1\right)^3}. \quad (6.6)$$

Dissemos no capítulo anterior que as equações de Friedmann e do traço das equações de campo em $z = 0$ permitem a eliminação de um parâmetro do nosso modelo. Lembramos que os parâmetros originais de nossas análises são Ω_{m0} , c_1 e c_2 . Vamos mostrar como podemos eliminar um destes parâmetros e facilitar nossa análise.

Em primeiro lugar, assim como para a análise do modelo exponencial, também iremos assumir aqui um universo plano, homogêneo e isotrópico descrito pela métrica FLRW. Logo, as equações de Friedmann e do traço das equações de campo são as mesmas utilizadas no capítulo anterior (e também serão utilizadas no próximo capítulo). Com isto, as Eqs. (5.7)–(5.9) em $z = 0$ tornam-se, respectivamente

$$6f_{R0}\xi_0^2 = 3\Omega_{m0} + 6\Omega_{r0} + \frac{f_0}{H_0^2}, \quad (6.7)$$

$$\xi_0 = 1 + \frac{9}{2} \frac{f_{RR0}}{f_{R0}} \frac{H_0^2 \Omega_{m0}}{f_{RR0} R_0 - f_{R0}}, \quad (6.8)$$

$$f_{R0} R_0 - 2f_0 = -3H_0^2 \Omega_{m0}. \quad (6.9)$$

Introduzindo as Eqs. (6.4) e (6.5) em $z = 0$ na Eq. (6.9) nós obtemos o parâmetro c_1 em termos de Ω_{m0} (através de m^2), c_2 e R_0 , ou seja,

$$c_1 = \left(1 - \frac{3m^2}{R_0}\right) \frac{\left(c_2 \frac{R_0}{m^2} + 1\right)^2}{2c_2 \frac{R_0}{m^2} + 1}. \quad (6.10)$$

Ao substituírmos esta expressão para c_1 na Eq. (6.7) e resolvermos para R_0 , iremos o seguinte polinômio do 11º grau:

$$C_{11} \left(\frac{R_0}{H_0^2}\right)^{11} + C_{10} \left(\frac{R_0}{H_0^2}\right)^{10} + C_9 \left(\frac{R_0}{H_0^2}\right)^9 + \dots + C_1 \left(\frac{R_0}{H_0^2}\right) + C_0 = 0, \quad (6.11)$$

onde os coeficientes C_i são dados por

$$\begin{aligned}
C_0 &= -486 \Omega_{m0}^{10} \\
C_1 &= 162 \Omega_{m0}^9 (\Omega_{r0} + \Omega_{m0} - 36c_2) \\
C_2 &= 81 c_2 \Omega_{m0}^8 (+15\Omega_{m0}16\Omega_{r0} - 288c_2 + 4) \\
C_3 &= 27 c_2 \Omega_{m0}^7 (+108c_2\Omega_{m0} + 5\Omega_{m0}126c_2\Omega_{r0} + 4\Omega_{r0} - 1296c_2^2 + 48c_2) \\
C_4 &= 27 c_2^2 \Omega_{m0}^6 (+81c_2\Omega_{m0} + 44\Omega_{m0}108c_2\Omega_{r0} + 40\Omega_{r0} - 648c_2^2 - 72c_2 - 2) \\
C_5 &= 9 c_2^2 \Omega_{m0}^5 (+351c_2\Omega_{m0} + 2\Omega_{m0}372c_2\Omega_{r0} - 432c_2^2 - 24c_2) \\
C_6 &= 18 c_2^3 \Omega_{m0}^4 (+135c_2\Omega_{m0} + 16\Omega_{m0}180c_2\Omega_{r0} + 8\Omega_{r0} - 156c_2) \\
C_7 &= 18 c_2^4 \Omega_{m0}^3 (+55\Omega_{m0}44\Omega_{r0} - 144c_2 + 8) \\
C_8 &= 12 c_2^4 \Omega_{m0}^2 (+63c_2\Omega_{m0} + 2\Omega_{m0}84c_2\Omega_{r0} - 24c_2) \\
C_9 &= 12 c_2^5 \Omega_{m0} (11\Omega_{m0} + 4\Omega_{r0}) \\
C_{10} &= 24 c_2^6 (3\Omega_{m0} + 4\Omega_{r0} - 4) \\
C_{11} &= 8 c_2^6.
\end{aligned}$$

O problema então se resume a encontrar raízes para R_0 . Evidentemente irão surgir raízes complexas indesejáveis que devem ser descartadas por não possuírem significado físico. De fato, precisamos apenas de raízes reais e positivas para R_0 .

Após reduzirmos nosso espaço de parâmetros livres ao conjunto $\mathbf{P} \equiv (\Omega_{m0}, c_2)$, ainda precisamos do escalar de Ricci em qualquer *redshift* para obtermos o parâmetro de Hubble $H(z)$ pela Eq. (5.7) e iniciarmos nossa comparação com os dados observacionais. Uma relação útil para este fim surge da diferenciação da Eq. (5.9) com relação ao *redshift* (realizando a conversão fator de escala-*redshift* (2.25)). Com isto, temos

$$\frac{dR}{dz} = -\frac{9H_0^2\Omega_{m0}(1+z)^2}{f_{RR}R - f}. \quad (6.12)$$

Esta equação diferencial pode ser resolvida utilizando-se o método de Runge–Kutta de 4ª ordem (para uma revisão detalhada deste método veja, por exemplo, Press et al. 1992), fixando a condição inicial em $z = 0$ e utilizando os valores de R_0 encontrados a partir do polinômio (6.11).

Sabemos que, independentemente do formalismo adotado, o modelo (6.4) deve satisfazer certas condições de viabilidade. Em nossas análises realizadas para o modelo HS, incluímos a restrição sobre a positividade do acolamento gravitacional efetivo mencionado na seção 4.6, $G_{\text{ef}} = G/f_R > 0$. Para facilitar os cálculos, vamos definir uma nova variável $y \equiv R/m^2$. Deste modo, a Eq. (6.5) para a derivada de f com relação à R pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
f_R &= 1 - \frac{c_1}{(1 + yc_2)^2} \\
&= 1 - \frac{1}{(1 + yc_2)^2} \left[\frac{(y_0 - 3)(1 + y_0c_2)^2}{y_0} \frac{1}{1 + 2y_0c_2} \right]. \quad (6.13)
\end{aligned}$$

Como a condição de positividade de G_{ef} tem que ser válida para qualquer *redshift*, ela terá que, obrigatoriamente, ser válida hoje. Com isto, por simplicidade, vamos nos ater apenas ao

Tabela 6.1.: Soluções da condição $G_{\text{ef}} > 0$ para o modelo de Hu–Sawicki.

$y_0 < 3$ $c_2 < r$ ou $c_2 > s$
$y_0 = 3$ todos os valores de c_2
$y_0 > 3$ $c_2 < s$ ou $c_2 > r$

caso $z = 0$. Assim, da Eq. (6.13) temos

$$\begin{aligned}
 f_{R0} &= 1 - \frac{1}{(1 + y_0 c_2)^2} \left[\frac{(y_0 - 3)(1 + y_0 c_2)^2}{y_0} \frac{1}{1 + 2y_0 c_2} \right] \\
 &= 1 - \left[\frac{(y_0 - 3)}{y_0(1 + 2y_0 c_2)} \right] \\
 &= \frac{y_0(1 + 2y_0 c_2) - (y_0 - 3)}{y_0(1 + 2y_0 c_2)} \\
 &= \frac{3 + 2y_0^2 c_2}{y_0(1 + 2y_0 c_2)}. \tag{6.14}
 \end{aligned}$$

Note que para $y_0 = 3$ ($R_0 = 3H_0\Omega_{m0}$), independentemente do valor de c_2 , teremos sempre $f_{R0} = 1$. Da Eq. (6.14) obtemos dois valores importantes para c_2 : $c_2 = -3/2y_0^2$ e $c_2 = -1/2y_0$. O primeiro é o que anula o numerador de f_{R0} , ou seja, a raiz da equação $f_{R0} = 0$. O segundo é o que anula o denominador, isto é, a singularidade de f_{R0} . Estes dois valores serão denotados por r e s^\dagger , respectivamente. A posição relativa desses dois valores no eixo de c_2 depende do valor de $y_0 = R_0/(H_0^2\Omega_{m0})$. Teremos três possibilidades: $r < s$ para $y_0 < 3$, $r = s$ para $y_0 = 3$ e $r > s$ para $y_0 > 3$.

Para analisarmos o sinal de f_{R0} temos que analisar o sinal da fração dada pela Eq. (6.14). Então, para obtermos $f_{R0} > 0$ teremos dois casos:

- Caso A:

$$3 + 2y_0^2 c_2 > 0 \Rightarrow c_2 > R \quad \text{e} \quad 1 + 2y_0 c_2 > 0 \Rightarrow c_2 > s. \tag{6.15}$$

Como dito acima, uma vez que a interseção desses dois conjuntos depende do valor de y_0 , as soluções para este caso serão:

$$\begin{aligned}
 y_0 < 3 &\Rightarrow c_2 > s \\
 y_0 = 3 &\Rightarrow c_2 > r = s \\
 y_0 > 3 &\Rightarrow c_2 > r.
 \end{aligned}$$

- Caso B:

$$3 + 2y_0^2 c_2 < 0 \Rightarrow c_2 < r \quad \text{e} \quad 1 + 2y_0 c_2 < 0 \Rightarrow c_2 < s. \tag{6.16}$$

Soluções deste caso:

$$\begin{aligned}
 y_0 < 3 &\Rightarrow c_2 < r \\
 y_0 = 3 &\Rightarrow c_2 < r = s \\
 y_0 > 3 &\Rightarrow c_2 < s.
 \end{aligned}$$

[†] r para a raiz e s para singularidade.

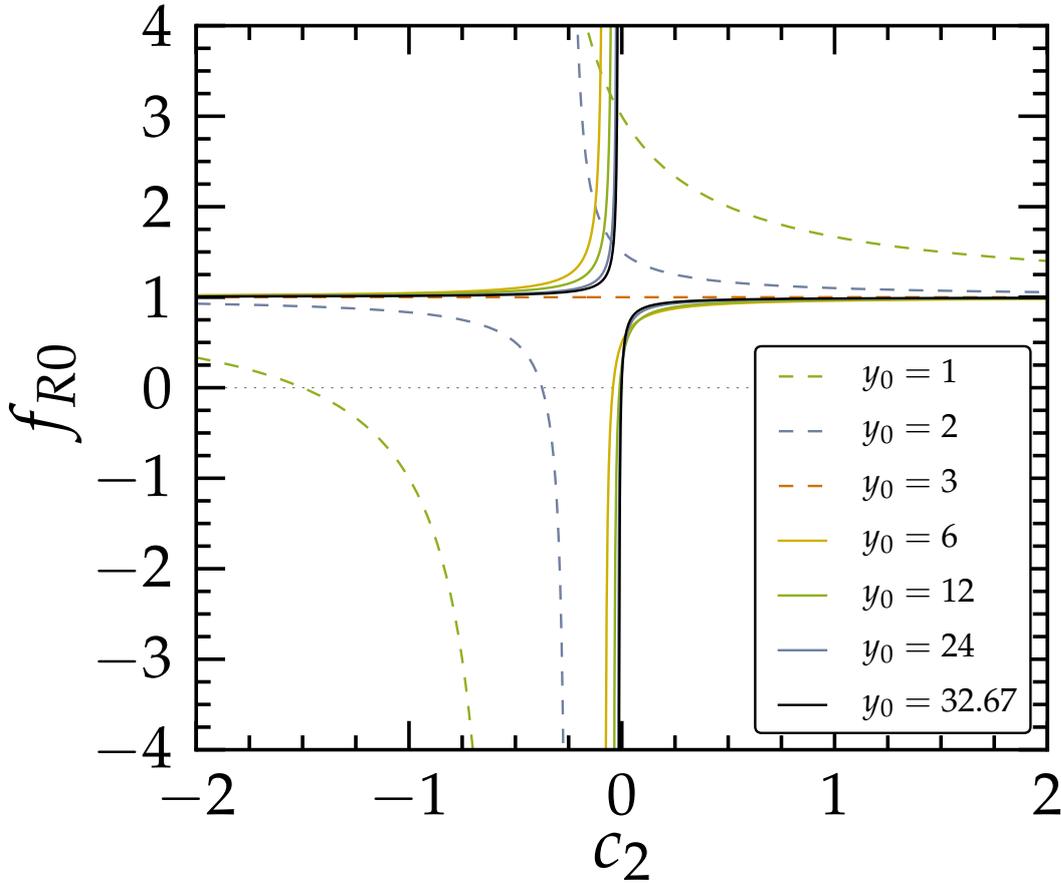


Figura 6.1.: Curvas de f_{R0} para $y_0 \leq 3$ (linhas tracejadas) e $y_0 > 3$ (linhas contínuas). Note que, como dito anteriormente, para $y_0 = 3$, temos sempre $f_{R0} = 1$, independentemente o valor de c_2 . A última curva ($y_0 = 32,67$) foi construída a partir dos valores de melhor ajuste fornecidos pela análise combinada CMB/BAO + $f_{\text{gás}}$ + $H(z)$ + SNs Ia, mostrados na tabela 6.2.

A solução geral do problema $f_{R0} > 0$ será dada pela união dos casos A e B. Isto é mostrado na tabela 6.1. Em termos de R_0 , podemos resumir os resultados desta tabela da seguinte forma: Para a época atual, a condição $G_{\text{ef}} > 0$ implica em

$$f_{R0} = \frac{3 + 2 \left(\frac{R_0}{m^2}\right)^2 c_2}{\frac{R_0}{m^2} \left[1 + 2 \left(\frac{R_0}{m^2}\right) c_2\right]} > 0, \quad (6.17)$$

que corresponde aos seguintes limites para o parâmetro c_2 :

$$c_2 < -\frac{1}{2} \frac{m^2}{R_0} \quad \text{ou} \quad c_2 > -\frac{3}{2} \left(\frac{m^2}{R_0}\right)^2. \quad (6.18)$$

A Fig. (6.1) mostra as curvas de f_{R0} para alguns valores de y_0 .

Para testarmos a viabilidade observacional do cenário $f(R)$ descrito pela Eq. (6.4), nós realizamos uma análise estatística de χ^2 utilizando estimativas de $H(z)$ juntamente com dados da

relação magnitude-*redshift* de SNs Ia. Assim como no trabalho sobre o modelo exponencial, nós utilizamos o conjunto de 11 determinações da taxa de expansão cósmica $H(z)$ de Stern et al. (2010). No entanto, o conjunto de SNs Ia utilizado neste trabalho, o Union2.1 (Suzuki et al. 2012), é uma atualização do conjunto Union2 e contém 23 eventos a mais do que este. Os dados observacionais de $H(z)$ e de SNs Ia estão representados nas Figs. 6.2a e 6.2b, respectivamente. Assim como na análise apresentada no capítulo 5, nós incluímos uma componente de radiação $\Omega_{r0} = 5 \times 10^{-5}$. Como já foi mencionado, o conjunto completo de parâmetros livres para este modelo é $\mathbf{P} \equiv (\Omega_{m0}, c_2)$.

Para o teste com a taxa de expansão cósmica, nós estimamos os parâmetros livres \mathbf{P} utilizando a mesma estatística de χ^2 do trabalho apresentado no capítulo 5, descrita pela Eq. (5.11). O teste estatístico com a relação distância-*redshift* de SNs Ia foi realizado de maneira semelhante à utilizada no trabalho sobre o modelo exponencial. No entanto, nós seguimos Suzuki et al. (2012) e incluímos nas análises deste trabalho os efeitos dos erros sistemáticos das medidas de $\mu(z)$. Portanto, para estimarmos o melhor ajuste e os erros dos parâmetros \mathbf{P} através da estatística de χ^2 , nós minimizamos a seguinte função:

$$\chi_{\text{SN}}^2 = \sum_{i=1}^{580} (\mu_i^{(\text{teo})} - \mu_i^{(\text{obs})}) (\mathbf{C}^{-1})_{ij} (\mu_j^{(\text{teo})} - \mu_j^{(\text{obs})}), \quad (6.19)$$

onde \mathbf{C} é a matriz de covariância 580×580 dos dados de $\mu(z)$ obtida em Suzuki et al. (2012).

Em todas as análises deste trabalho, nós realizamos uma marginalização numérica sobre a constante de Hubble H_0 , incluindo um *prior* Gaussiano de $H_0 = 73,8 \pm 2,4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Riess et al. 2011).

Do mesmo modo que no trabalho sobre o modelo exponencial, nós também realizamos uma análise combinada dos dados de $H(z)$ e SNs Ia, através da minimização do χ^2 combinado $\chi_{\text{T}}^2 = \chi_{\text{H}}^2 + \chi_{\text{SN}}^2$ para investigarmos a complementaridade dos dados utilizados.

Antes de apresentarmos nossos resultados e discussões, vamos resumir os passos descritos no início desta seção para obtermos o parâmetro de Hubble (5.7) e compará-lo com os dados.

1. Primeiro calculamos c_1 em termos de c_2 e R_0 a partir da Eq. (6.9);
2. Combinamos este resultado com a Eq. (6.7) para obtermos a solução para R_0 ;
3. O valor de R_0 é então utilizado como condição inicial para resolvermos a Eq. (6.12) através do método de Runge–Kutta de 4ª ordem;
4. Finalmente, utilizamos $R(z)$ calculado no passo anterior para obtermos a função $H(z)$, dada pela Eq. (5.7).

6.3. Resultados e discussão

A Fig. 6.2 mostra a evolução do parâmetro de Hubble e o módulo de distância $\mu(z)$ para alguns valores de melhor ajuste de Ω_{m0} e c_2 obtidos em nossas análises (veja a tabela 6.2). Para efeito de comparação, a previsão do modelo Λ CDM com $\Omega_{m0} = 0,26$ também é mostrada (linha pontilhada).

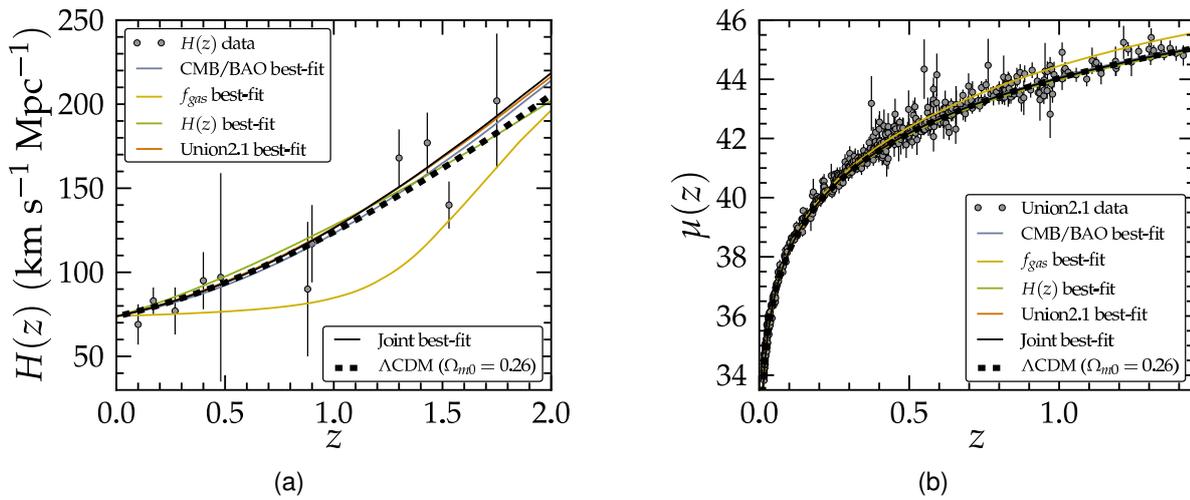


Figura 6.2.: (a) Estimativas do parâmetro de Hubble $H(z)$ como função do *redshift* obtidos em Stern et al. (2010); (b) Diagrama de Hubble para as 580 SNs Ia do conjunto Union2.1 (Suzuki et al. 2012). Em ambas as figuras, as curvas correspondem aos valores de melhor ajuste dos parâmetros do modelo de Hu–Sawicki no formalismo de Palatini (Ω_{m0}, c_2), mostrados na tabela 6.2. Para efeitos de comparação, o modelo Λ CDM plano com $\Omega_{m0} = 0,26$ também é mostrado.

Na Fig. 6.3a mostramos os contornos correspondentes a $\Delta\chi^2 = 2,3$ e $\Delta\chi^2 = 6,17$ no plano $\Omega_{m0} \times c_2$. A partir dessa análise, vemos claramente que nem as medidas isoladas de $H(z)$ e de SNs Ia e nem a combinação de ambos podem colocar limites muito restritivos sobre os valores do parâmetro c_2 .

A Fig. 6.3b mostra os resultados obtidos quando outros dois conjuntos de observações cosmológicas são incluídos, a saber: 7 estimativas da razão entre a escala acústica da CMB ℓ_A e o pico das oscilações acústicas bariônicas (BAO), obtidos por Blake et al. (2011b), e 57 medidas da fração de massa de gás em raios-X de conjuntos de galáxias luminosas discutidas em Ettori et al. (2009) (veja Allen et al. (2002), Lima et al. (2003), Blake et al. (2011a) para mais detalhes sobre esses testes cosmológicos).

Podemos observar a partir da Fig. 6.3b que estes observáveis cosmológicos parecem ser incapazes de fornecer contornos ortogonais aos mostrados na Fig. 6.3a. Se fossem capazes, a inclusão destes observáveis nos forneceria limites mais restritivos sobre c_2 a partir de uma análise conjunta. Para esta análise conjunta, os valores de melhor ajuste são (ver tabela 6.2) $\Omega_{m0} = 0,30$ e $c_2 = -0,25$, com $\chi_r^2 \simeq 1,01$, que está bem próximo do nosso valor encontrado para o modelo Λ CDM utilizando os mesmos dados, $\chi_r^2 \simeq 1,001$. Este resultado mostra claramente que os cenários HS + Palatini e Λ CDM são indistinguíveis uns dos outros no nível de *background*, o que coincide com a análise realizada no formalismo métrico e discutida por Martinelli et al. (2012) (embora a história da expansão para os formalismos métrico e o de Palatini sejam completamente diferentes). Vale ressaltar que, em nossas análises, nós consideramos tanto valores positivos quanto negativos do parâmetro c_2 , de acordo com a restrição (6.17). Note também que, para $c_2 = 0$, o cenário cosmológico para o modelo HS (6.4) se reduz ao modelo Einstein-de Sitter, o qual é conhecidamente descartado pelos dados atuais.

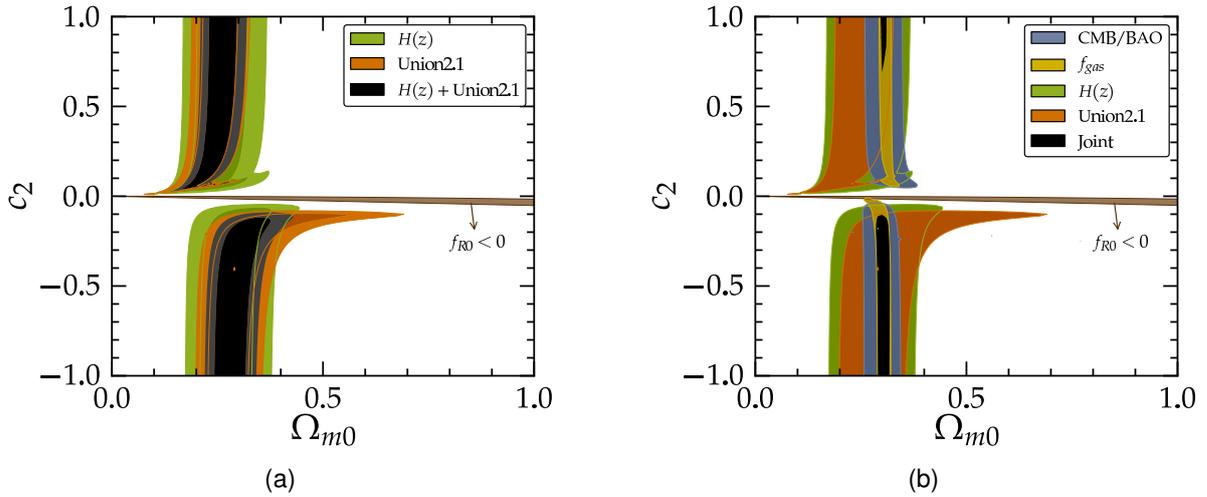


Figura 6.3.: (a) Contornos de $\Delta\chi^2 = 2,3$ e $\Delta\chi^2 = 6,17$ no plano $\Omega_{m0} \times c_2$ decorrente da análise envolvendo dados de $H(z)$ (verde) e SNs Ia (laranja). Contornos pretos representam a análise conjunta envolvendo estes dois conjuntos de dados; (b) Contornos de $\Delta\chi^2 = 6,17$ no plano $\Omega_{m0} \times c_2$ quando 7 medidas da razão CMB/BAO e 57 medidas da fração de massa de gás de aglomerados de galáxias são adicionadas. Também indicamos a região $f_{R0} < 0$ correspondente aos limites (6.18) para os valores de melhor ajuste mostrados na tabela 6.2.

6.3.1. História cósmica

Utilizamos os valores de melhor ajuste da análise combinada discutida acima, bem como os outros mostrados na tabela 6.2, para discutirmos algumas consequências cosmológicas desta classe de cosmologias $f(R)$, a partir dos parâmetros de desaceleração (2.73) e do parâmetro da equação de estado efetiva (5.15). Como pode ser visto na Fig. 6.4a, para algumas combinações dos parâmetros livres deste modelo, a evolução cósmica é “bem comportada”, com uma desaceleração cósmica no passado e uma fase de aceleração recente iniciando em $z \simeq 1$, o que parece estar de acordo com análises cinemáticas atuais (veja, por exemplo, Pires et al. 2010, para uma análise cosmográfica sobre o modelo lei-de-potência). Para todas as combinações de melhor ajuste mostradas na tabela 6.2, a Fig. 6.4b mostra que o universo passou pelas últimas três fases usuais da evolução cosmológica, ou seja, a fase dominada pela radiação ($w_{ef} = 1/3$), a dominada pela matéria ($w_{ef} = 0$), e a fase atual de aceleração ($w_{ef} < 0$), o que também ocorre no cenário Λ CDM. A partir destes resultados, também fica claro que os argumentos de Amendola et al. (2007b) sobre o comportamento de w_{ef} no formalismo métrico parecem não se aplicar ao formalismo de Palatini na classe de modelos discutida neste capítulo e nos intervalos dos parâmetros Ω_{m0} e c_2 fornecidos por nossas análises. Além disso, em contraste com os resultados do modelo $f(R)$ exponencial do capítulo 5, não encontramos soluções de aceleração cósmica transiente na qual modificações da gravidade em larga escala irá conduzir o Universo para uma nova era dominada pela matéria no futuro.

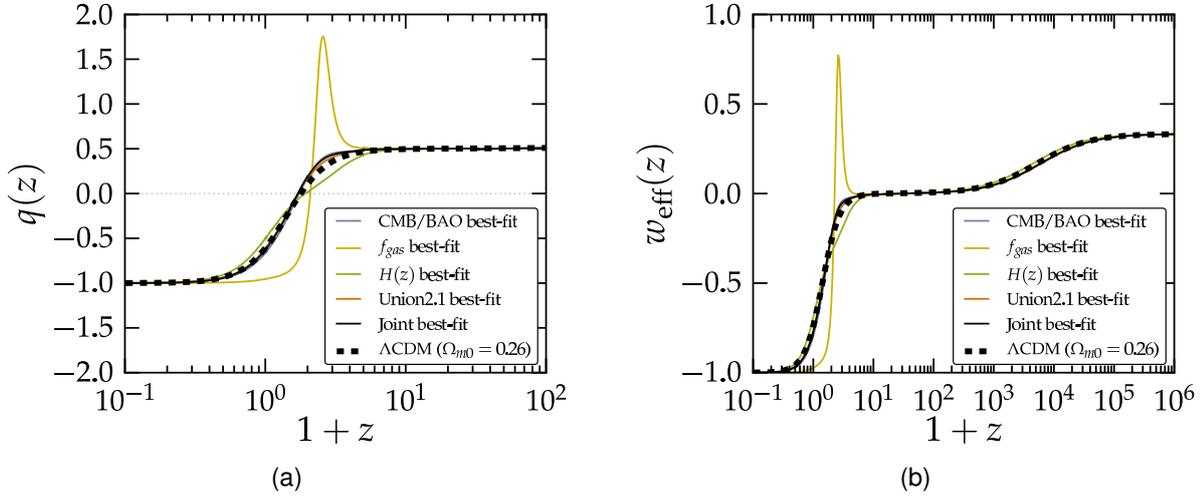


Figura 6.4.: (a) Evolução do parâmetro de desaceleração $q(z)$ como função do *redshift* para o modelo de gravidade de Hu–Sawicki no formalismo de Palatini. O modelo Λ CDM também é mostrado para efeito de comparação; (b) Evolução do parâmetro da equação de estado efetiva para o mesmo modelo. Assim como na Fig. 6.2, em ambas as figuras, as curvas correspondem aos valores de melhor ajuste de Ω_{m0} e c_2 mostrados na tabela 6.2.

Tabela 6.2.: Valores de melhor ajuste para os parâmetros do modelo $f(R)$ de Hu–Sawicki. Os erros em Ω_{m0} são os intervalos de confiança de 68,3% e 95,4%.

Teste	Ω_{m0}	c_2	c_1	f_{R0}	$\chi^2_{\text{mín}}$	χ^2_r
$H(z)$	$0,22^{+0,11 \ +0,19}_{-0,08 \ -0,13}$	0,08	2,23	0,88	7,72	0,86
SNs Ia	$0,29^{+0,19 \ +0,34}_{-0,17 \ -0,21}$	-0,40	-5,41	1,03	553,81	0,96
CMB/BAO	$0,29^{+0,03 \ +0,07}_{-0,01 \ -0,03}$	-0,18	-2,17	1,08	1,24	0,25
$f_{\text{gás}}$	$0,28^{+0,01 \ +0,04}_{-0,01 \ -0,02}$	-0,03	-0,04	1,61	95,10	1,73
$H(z) + \text{SNs Ia}$	$0,28^{+0,06 \ +0,12}_{-0,07 \ -0,15}$	-0,85	-12,64	1,02	561,63	0,95
CMB/BAO + $f_{\text{gás}}$ + $H(z)$ + SNs Ia	$0,30^{+0,01 \ +0,02}_{-0,01 \ -0,02}$	-0,25	-3,04	1,06	659,87	1,01

6.4. Sumário

Neste capítulo nós utilizamos o *ansatz* proposto por Hu & Sawicki (2007) no formalismo métrico e investigamos suas propriedades à luz do formalismo de Palatini. Também estudamos suas consequências cosmológicas comparando-o com dados observacionais da taxa de expansão cósmica, SNs Ia, CMB/BAO e da fração de massa de gás de aglomerados de galáxias. Com relação à história cósmica, nós mostramos que os melhores ajustes encontrados para os parâmetros Ω_{m0} e c_2 permitem a sequência desejada das eras cosmológicas radiação-matéria-aceleração, o que demonstra sua viabilidade sob este aspecto. Ao contrário dos resultados para o modelo exponencial apresentados no capítulo anterior, este modelo não exibe uma história de aceleração transiente no futuro, pelo menos para os valores dos parâmetros encontrados nesta análise. Os resultados deste trabalho representam uma contribuição original à literatura e foram publicados por Santos et al. (2012). No próximo capítulo, nós estudaremos as consequências cosmológicas do já conhecido modelo lei-de-potência à luz de dados observacionais recentes, com ênfase na de fração de massa de gás em aglomerados de galáxias.

7 Restrições da fração de gás de aglomerados galácticos sobre modelos tipo lei-de-potência

Resumo: *O modelo $f(R)$ caracterizado por uma lei-de-potência no formalismo de Palatini é introduzido. O método e as equações básicas utilizadas em nossas análises para este modelo são apresentadas e novos resultados sobre a viabilidade deste modelo no formalismo de Palatini a partir de testes envolvendo a fração de massa de gás são e combinações com outros observáveis são discutidos.*

7.1. O modelo

Muitos autores têm considerado modificações na Lagrangiana de Einstein–Hilbert através da adição de termos na forma R^n . Como é conhecido, para $n > 1$ estes termos tornam-se efetivos em regimes de altas curvaturas, levando a modificações na cosmologia conhecida do universo primordial. De fato, um modelo deste tipo, $f(R) = R + \alpha R^2$ ($\alpha > 0$), foi o primeiro modelo de inflação, proposto por Starobinsky (1980). Por outro lado, modificações $n < 0$ são relevantes nos regimes de baixas curvaturas e influenciam a dinâmica do universo recente, podendo conduzir a expansão acelerada observada.

Com este objetivo, Carroll et al. (2004) propuseram e investigaram um termo adicional proporcional a $1/R$ no formalismo métrico, o que é conhecido como modelo CDTT (Carroll–Duvvuri–Troden–Turner). Posteriormente, estes termos foram investigados seguindo o formalismo de Palatini por Vollick (2003) e Meng & Wang (2003). Capozziello et al. (2006b) estudaram o termo $1/R$ na Lagrangiana de Einstein–Hilbert e concluíram que uma modificação

na gravidade deste tipo implica em uma aceleração na expansão. No entanto, a Lagrangiana investigada por eles foi do tipo $f(R) \propto 1/R$ e não uma adição ao termo linear já existente na Lagrangiana EH ($f(R) = R + \text{constante}/R$). Para uma discussão mais detalhada que sobre as diferenças que essas abordagens exibem, veja Amendola et al. (2007c).

Uma forma mais geral para estes modelos tipo lei-de-potência têm sido considerada e exaustivamente explorada em ambos os formalismos. Se trata da função

$$f(R) = R + \beta/R^n, \quad (7.1)$$

onde n e β são parâmetros dimensionais. Em geral, n pode assumir valores positivos e negativos. Este modelo de gravidade pode levar a aceleração cósmica e, como é possível notar, possui o modelo Λ CDM como um caso especial para $n = 0$ e $\beta = -2\Lambda$.

Como já vimos no último capítulo, o formalismo métrico tem sido empregado em diversos estudos de viabilidade deste modelo. Foi mostrado por Chiba (2003) que esta forma funcional de $f(R)$ não “passa” nos testes do Sistema Solar. (Sotiriou 2006a,b) mostraram ainda que este modelo não possui o limite Newtoniano correto. Além disso, este foi o modelo utilizado nas investigações sobre a instabilidade de Dolgov–Kawasaki descrita na seção 4.7.

Contudo, o problema mais relevante para esta tese concernente ao uso deste modelo no formalismo métrico é sua incapacidade em reproduzir uma história da expansão cósmica viável. Vimos na seção 2.4.4 que, uma vez que a equação de estado para a matéria é $p = 0$, a lei de evolução para o fator de escala quando o Universo é dominado por esta componente é $a(t) \propto t^{2/3}$. Como demonstrado por Amendola et al. (2007a,b), este modelo não é capaz de reproduzir a dinâmica cosmológica correta, com a lei de evolução $a(t) \propto t^{2/3}$ na era dominada pela matéria seguida pela fase de aceleração cósmica, o que ocorre devido ao forte acoplamento entre a energia escura e a matéria escura.

Em um trabalho recente Pires et al. (2010) analisaram cosmograficamente os valores de melhor ajuste de n e β através da evolução do parâmetro de desaceleração $q(z)$. Considerando um intervalo para o parâmetro de densidade de matéria $\Omega_{m0} = [0,1, 0,3]$, os autores descobriram que correções do tipo $1/R^n$ podem admitir somente valores positivos para n . Podemos ver na Fig. 7.1a que valores positivos de n fornecem uma evolução de $q(z)$ muito similar à do modelo Λ CDM, enquanto valores negativos de n prevêm ou uma expansão sempre acelerada — o que é claramente incompatível com a existência de uma era dominada pela matéria — ou duas fases de aceleração separadas por uma fase de desaceleração. Na Fig. 7.1b podemos ver o comportamento do *redshift* z_t da primeira transição entre fases acelerada/desacelerada que são previstas para alguns valores negativos de n . Nela notamos que, na medida em que o valor de n se aproxima de 0, o valor de z_t aumenta drasticamente, algo mais aceitável, uma vez que o cenário padrão atual prevê uma fase de expansão inflacionária antes da era dominada pela radiação.

Diversos testes observacionais têm sido empregados na obtenção de limites para os parâmetros dimensionais n e β do modelo (7.1) Utilizando a compilação de SNs Ia *Gold*, dados de BAO e também de CMB, Amarguioui et al. (2006) encontraram como melhores ajustes para estes parâmetros $n = -0,09$ e $\beta = 3,60$. Fay et al. (2007) utilizaram o conjunto de SNs Ia SNLS (*Supernova Legacy Survey*) juntamente com dados de BAO e CMB e obtiveram $n = -0,027$ e

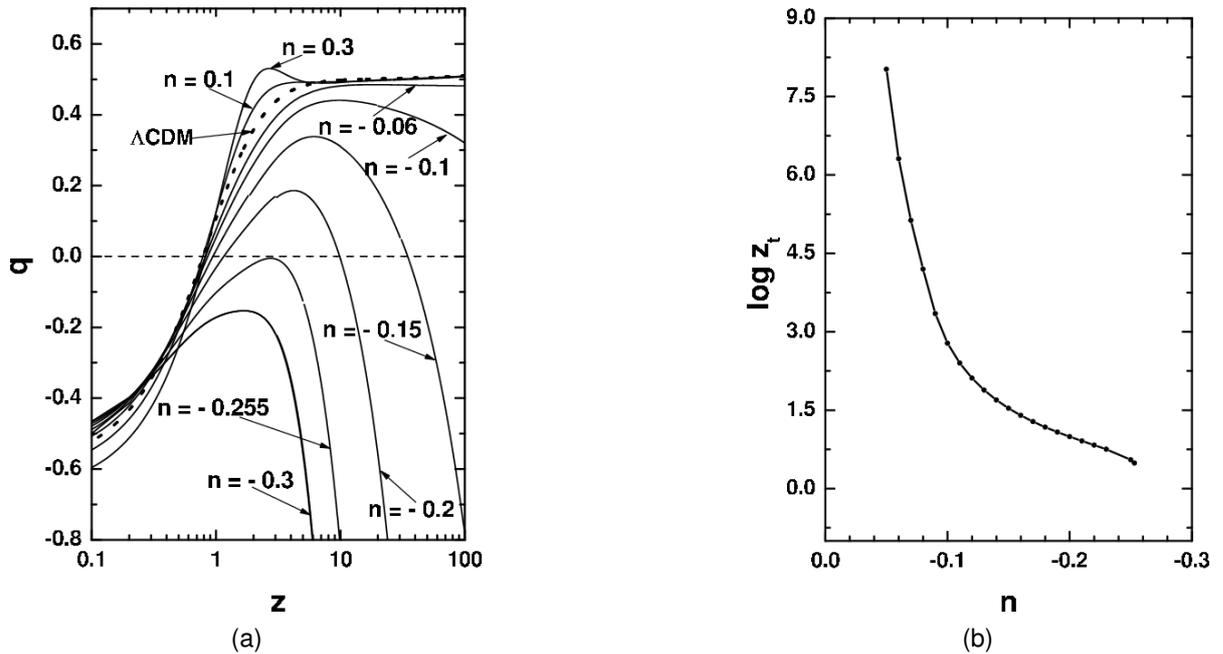


Figura 7.1.: (a) Evolução do parâmetro de desaceleração $q(z)$ para o modelo lei-de-potência no formalismo de Palatini. Todas as curvas foram obtidas com $\Omega_{m0} = 0,26$; (b) Evolução do redshift da primeira transição entre fases acelerada/desacelerada para alguns valores negativos de n . Figuras reproduzidas de Pires et al. (2010).

$\beta = 4,63$. Santos et al. (2008) encontraram $n = -0,12$ e $\beta = 3,45$ para análises envolvendo o conjunto de SNs Ia *Union* conjuntamente com BAO e CMB. Finalmente, Carvalho et al. (2008) utilizaram a amostra de estimativas de $H(z)$ SVJ05, juntamente com dados de CMB (WMAP) e de BAO (SDSS) e encontraram $n = 0,03$ e $\beta = 4,7$. A tabela 7.1 resume intervalos encontrados sobre n e β na literatura.

Como vemos, o modelo lei-de-potência tem sido confrontado com vários observáveis até o presente momento. No entanto, até hoje não foram realizados muitos estudos envolvendo o teste da fração de massa de gás ($f_{\text{gás}}$) de aglomerados de galáxias, proposto por Sasaki (1996) e apresentado no apêndice A.3. Esse teste, que já foi utilizado no capítulo 6, tem se mostrado robusto e complementar a outros testes mais utilizados (como SNs Ia e BAO) e muitos autores tem seguido essa abordagem para os mais diversos fins (David et al. 1995, Allen et al. 2002, Ettori et al. 2003, Sadat et al. 2005, Allen et al. 2008, Lima et al. 2003, Blake et al. 2011a).

No que concerne à Lagrangiana (7.1), o teste observacional da fração de massa de gás já foi utilizado por Capozziello et al. (2006a), que utilizaram 26 aglomerados de galáxias extraídos de Allen et al. (2004). O presente estudo utiliza a amostra contendo 31 aglomerados de galáxias a mais, obtidas de Ettori et al. (2009). Naquele trabalho, os parâmetros livres analisados foram Ω_{m0} , h (H_0 em unidades de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$) e n . Os resultados encontrados para o parâmetro de densidade da matéria Ω_{m0} e para a constante de Hubble h estão em concordância com estimativas atuais independentes de modelos. Para o parâmetro n eles encontraram $1,91 < n < 2,61$ no nível de confiança de 95,4%, o que diferencia este modelo do cenário ΛCDM $n = 0$ em pelo menos 2σ .

Nosso objetivo neste capítulo será apresentar novas restrições sobre os parâmetros n e β

Tabela 7.1.: Alguns intervalos de confiança de 99,73% encontrados na literatura para os parâmetros n e β do modelo lei-de-potência.

Teste	Referência	n	β
$f_{\text{gás}} + \text{Union2} + \text{CMB/BAO} + H(z)$	Este trabalho	$[-0,06, 0,43]$	$[3,77, 9,90]$
Gold + CMB + BAO	Amarzguioui et al. (2006)	$[-0,3, 0,3]$	$[-6,8, -2,2]$
SNLS + CMB + BAO	Fay et al. (2007)	$[-0,23, 0,42]$	$[2,73, 10,6]$
Union + CMB + BAO	Santos et al. (2008)	$[-0,3, 0,1]$	$[1,3, 5,5]$
$H(z) + \text{CMB} + \text{BAO}$	Carvalho et al. (2008)	$[-0,25, 0,35]$	$[2,3, 7,1]$
Lentes gravitacionais fortes	Yang & Chen (2009)	$[-0,202, 0,078 \times 10^{-6}]$	$[2,89, 4,67]$

do modelo (7.1) no formalismo de Palatini, a partir de dados da fração de massa de gás ($f_{\text{gás}}$) em aglomerados de galáxias. Adicionalmente, também iremos combinar os dados de $f_{\text{gás}}$ com observações de SNs Ia, com estimativas da razão CMB/BAO, e com determinações da taxa de expansão cósmica $H(z)$.

7.2. Metodologia

A metodologia apresentada neste capítulo é semelhante à apresenta no capítulo 6.4. Aqui também iremos apresentar as equações necessárias e os resultados que obtemos após realizarmos os procedimentos descritos na seção 6.2. Começaremos com as equações que descrevem o modelo em questão. O modelo investigado é dado por (7.1), e suas derivadas são

$$f_R(R) = 1 + \frac{\beta n}{R^{n+1}} \quad (7.2)$$

$$f_{RR}(R) = -\frac{\beta n(n+1)}{R^{n+2}}. \quad (7.3)$$

É conveniente reduzirmos nosso espaço paramétrico de (Ω_{m0}, n, β) para (Ω_{m0}, n) . A solução para β a partir da Eq. (6.9) fornece

$$\beta = \left(1 - \frac{3H_0^2 \Omega_{m0}}{R_0}\right) \frac{R_0^n}{n+2}. \quad (7.4)$$

O polinômio formado após a substituição desta expressão na Eq. (6.9) é o seguinte polinômio do 5º grau:

$$C_5 \left(\frac{R_0}{H_0^2}\right)^5 + C_4 \left(\frac{R_0}{H_0^2}\right)^4 + C_3 \left(\frac{R_0}{H_0^2}\right)^3 + C_2 \left(\frac{R_0}{H_0^2}\right)^2 + C_1 \left(\frac{R_0}{H_0^2}\right) + C_0 = 0, \quad (7.5)$$

Tabela 7.2.: Resultados para o modelo lei-de-potência no formalismo de Palatini. Os erros correspondentes aos parâmetros Ω_{m0} e n correspondem ao intervalo de confiança de 99,73%.

Teste	Ω_{m0}	n	$\chi^2_{\text{mín}}$	χ^2_r
$f_{\text{gás}}$	$0,28^{+0,05}_{-0,02}$	$3,92^{+?}_{-4,35}$	94,02	1,71
Combinado	$0,31^{+0,02}_{-0,02}$	$0,16^{+0,27}_{-0,22}$	654,85	1,04

com

$$\begin{aligned}
C_0 &= 243 n^2 (n + 3)^2 \Omega_{m0}^4 \\
C_1 &= 486 n^2 (n + 1) (n + 3) \Omega_{m0}^3 + 162 n^3 (n + 3) \Omega_{m0}^4 \\
C_2 &= 27 n (n - 24) (n + 1)^2 \Omega_{m0}^2 - 162 n^2 (n + 1) (n + 4) \Omega_{m0}^3 \\
C_3 &= -216 n (n + 1)^3 \Omega_{m0} + 18 n (n + 15) (n + 1)^2 \Omega_{m0}^2 \\
C_4 &= 48 (n + 1)^4 + 18 (n - 2) (n + 1)^3 \Omega_{m0} \\
C_5 &= -4 (n + 1)^4.
\end{aligned}$$

Os valores reais e positivos de R_0 devem ser utilizados como condição inicial de (6.12) de forma a obtermos $R(z)$ e, conseqüentemente, $H(z)$ a partir da Eq. (5.7). Assim como na análise apresentada nos capítulos 5 e 6, o valor da componente de radiação considerado foi $\Omega_{r0} = 5 \times 10^{-5}$.

Nossa análise estatística consistiu de uma minimização de χ^2 . Os principais dados observacionais desta análise são representados por 57 medições da fração de massa de gás de aglomerados de galáxias obtidos em Ettori et al. (2009). Para estas dados, nós minimizamos a seguinte função:

$$\chi^2_{f_{\text{gás}}} = \sum_{i=1}^{N_{f_{\text{gás}}}} \frac{\left[f_{\text{gás}}^{(\text{teo})}(z_i | \mathbf{P}) - f_{\text{gás}}^{(\text{obs})}(z_i) \right]^2}{\sigma_i^2}, \quad (7.6)$$

onde $\mathbf{P} = (\Omega_{m0}, n)$, $f_{\text{gás}}^{(\text{teo})}(z_i | \mathbf{P})$ é o valor teórico para a fração de gás de um aglomerado galáctico em z_i , dado pela Eq. (A.11), e σ_i é a incerteza para cada uma das $N_H = 57$ determinações de $f_{\text{gás}}^{(\text{obs})}(z_i)$ utilizadas. Para obtermos limites mais restritivos sobre os parâmetros do modelo, complementamos nossa análise incluindo as mesmas 557 medições da relação magnitude-*redshift* do conjunto *Union2* utilizadas no capítulo 5, assim como os mesmos dados da razão CMB/BAO e $H(z)$ lá contidos.

7.3. Resultados e discussão

Na Fig. 7.2 mostramos os contornos para a análise envolvendo $f_{\text{gás}}$, assim como para a análise conjunta $f_{\text{gás}} + \text{SNs Ia} + \text{CMB/BAO} + H(z)$. A complementaridade desses observáveis no plano $\Omega_{m0} \times n$ fornece limites bem restritos sobre Ω_{m0} e n . O valor de melhor ajuste para Ω_{m0} a partir da análise conjunta é consistente com as estimativas atuais para o modelo padrão ΛCDM (veja, por exemplo, Spergel et al. 2003, 2007). A análise conjunta restringe os parâmetros Ω_{m0} , n e

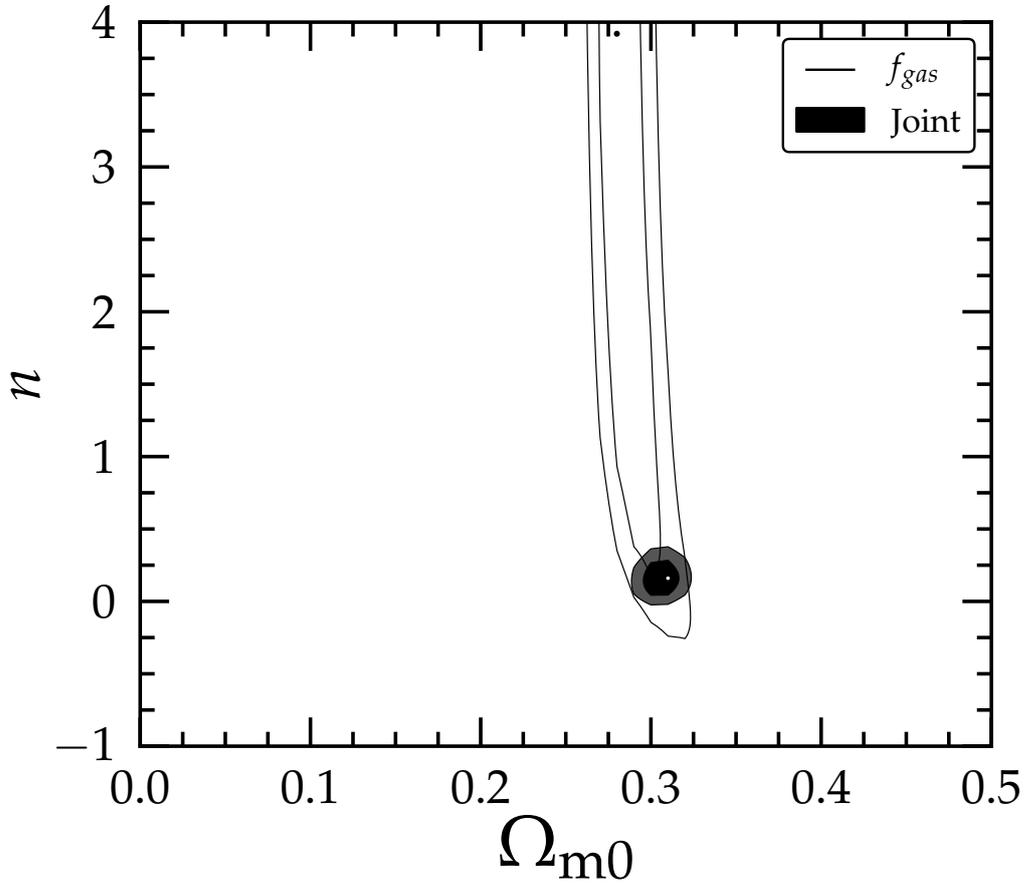


Figura 7.2.: Regiões de confiança de 68,3% e 95,4% no plano $\Omega_{m0} \times n$ fornecido pelas análises envolvendo $f_{gás}$, SNs Ia, CMB/BAO e $H(z)$. Os melhores ajustes para a análise combinada são $\Omega_{m0} = 0,31$ e $n = 0,16$.

β (calculado a partir dos valores de Ω_{m0} e n , e que possui unidades de $H_0^{2(n+1)}$) aos seguintes intervalos de 99.73% (ver tabela 7.2)

$$\begin{aligned} 0,29 < \Omega_{m0} < 0,33, \\ -0,06 < n < 0,43, \\ 3,77 < \beta < 9,90. \end{aligned}$$

Note que a constante cosmológica, $n = 0$ e $\beta = 4,38H_0^2$, encontra-se nos intervalos listados acima. Observe também que, por este motivo, este resultado está em grande desacordo com os realizados por Capozziello et al. (2006a) utilizando $f_{gás}$. Entretanto, estes resultados são consistentes com aqueles obtidos por Amarguioui et al. (2006), Fay et al. (2007), Santos et al. (2008), Carvalho et al. (2008) com observáveis diferentes. A tabela 7.2 resume os principais resultados de nossas análises.

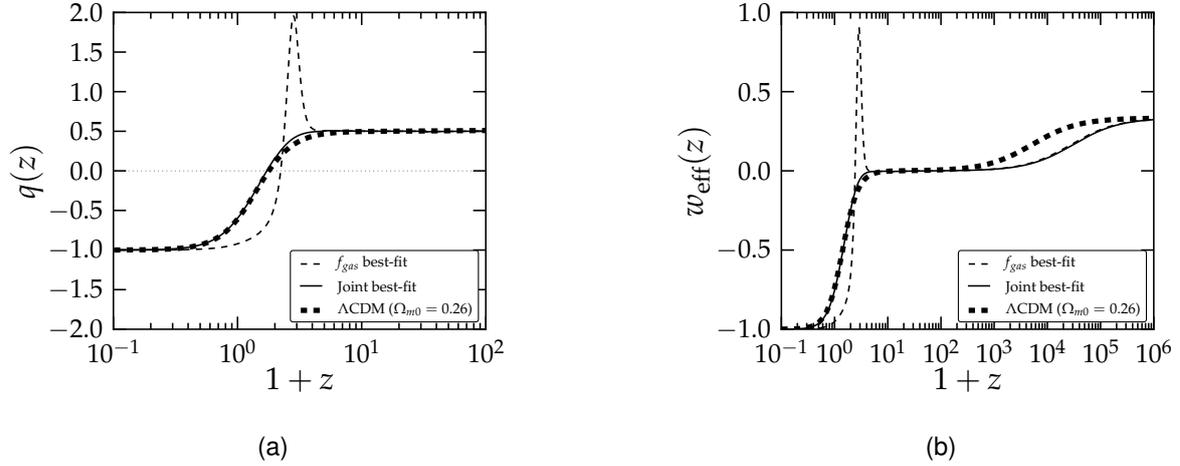


Figura 7.3.: (a) Evolução do parâmetro de desaceleração $q(z)$ como função do *redshift* para o modelo de gravidade lei-de-potência no formalismo de Palatini. O modelo Λ CDM também é mostrado para efeito de comparação; (b) Evolução do parâmetro da equação de estado efetiva para o mesmo modelo. Em ambas as figuras, as curvas correspondem aos valores de melhor ajuste de Ω_{m0} e c_2 mostrados na tabela 7.2.

7.3.1. História cósmica

Assim como nos trabalhos apresentados nos capítulos 5 e 6, para estudarmos a viabilidade deste modelo nós construímos a história cósmica prevista para esta classe de modelos através dos parâmetros $q(z)$ e $w_{ef}(z)$, dados pelas Eqs. (2.73) e (5.15), respectivamente. As evoluções de $q(z)$ e $w_{ef}(z)$ são mostradas na Fig. 7.3, para os valores de melhor ajuste apresentados na tabela 7.2. Com relação à $q(z)$, notamos que para nossos valores de melhor ajuste fornecidos pela análise conjunta, a expansão cósmica passou por uma fase de desaceleração no passado ($q(z) > 0$) e alcançou uma fase de aceleração quando $z \sim 0,75$, que é aproximadamente consistente com a previsão do modelo Λ CDM com $\Omega_{m0} = 0,27 \pm 0,04$ (Komatsu et al. 2011). Por outro lado, a evolução cósmica para os valores de melhor ajuste vindos da análise com $f_{gás}$ apresenta um valor máximo de $q(z)$ após a era dominada pela matéria e antes da transição aceleração-desaceleração. Uma possível razão para este comportamento é a existência de uma época de forte gravidade antes da recente transição aceleração-desaceleração.

A Fig. 7.3b nos mostra que para as combinações apresentadas na tabela 7.2, o universo passou por uma fase dominada pela matéria ($w_{ef} = 0$) antes da mudança para a fase de aceleração ($w_{ef} < 0$). Em particular, notamos que para os valores de melhor ajuste derivados da análise conjunta da $f_{gás} + \text{SNs Ia} + \text{CMB/BAO} + H(z)$, parece não haver nenhuma evidência para uma diminuição da aceleração cósmica hoje, o que está em desacordo com os resultados de Shafieloo et al. (2009) para algumas parametrizações de energia escura, bem como os resultados apresentados no capítulo 5 para o modelo $f(R)$ exponencial no formalismo de Palatini. Podemos concluir, portanto, que o comportamento indesejável de w_{ef} mostrado por Amendola et al. (2007a,b) no formalismo métrico parece não se aplicar ao formalismo de Palatini, pelo menos quando a classe de gravidade lei-de-potência (7.1) é considerada, e para os intervalos dos parâmetros livres Ω_{m0} e n fornecidos por nossas análises.

7.4. Sumário

Neste capítulo nós apresentamos novos resultados sobre o modelo lei-de-potência utilizando a abordagem de Palatini. Embora esta forma funcional já tenha sido extensivamente investigada na literatura com a utilização de diversos dados observacionais, as restrições estatísticas e as consequências cosmológicas impostas pelos dados da fração de massa de gás de aglomerados de galáxias ainda não haviam sido bem avaliadas. Vimos que o caso padrão Λ CDM é permitido por nossas análises no intervalo de confiança de 99,73%, levando-se em conta a combinação dos dados de $f_{\text{gás}}$ com dados de SNs Ia, CMB/BAO e $H(z)$. No que diz respeito à história da evolução do universo, mostramos que os valores de melhor ajuste dos parâmetros Ω_{m0} e n permitem a sequência esperada das eras cosmológicas radiação-matéria-aceleração, demonstrando assim a sua viabilidade neste sentido. Nossos resultados corroboram conclusões anteriores sobre este modelo no formalismo de Palatini utilizando dados observacionais como SNs Ia, BAO e CMB, mas se distingue dos apresentados por Capozziello et al. (2006a), no qual os autores realizaram o mesmo teste cosmológico aplicado neste capítulo (embora com uma amostra diferente). É importante mencionar que o artigo a partir do qual este capítulo foi baseado está em preparação Santos et al. (2013).

Este capítulo encerra a apresentação dos testes de viabilidade realizados nesta tese. Para finalizarmos, veremos a seguir as principais conclusões de nossos trabalhos como, também, perspectivas de trabalhos futuros nesta linha de pesquisa.

8 Conclusões e perspectivas

Nos últimos anos, a busca por uma teoria que explique a aceleração cósmica tem sido bastante intensa. Atualmente, os diversos modelos que tentam explicar este fenômeno são confrontados com os mais variados tipos de dados observacionais e o crescente avanço tecnológico que vem ocorrendo tem permitido a obtenção de resultados cada vez mais precisos, filtrando, deste modo, os modelos mais aceitáveis do ponto de vista observacional. Embora a descoberta da aceleração não tenha sido o que motivou o surgimento das teorias $f(R)$ — uma vez que as primeiras modificações do tipo $R \rightarrow f(R)$ na ação EH datam de meados do século passado, essas teorias têm se mostrado bastante viáveis e eficazes como candidatos à solução deste problema.

No entanto, qualquer investigação utilizando teorias $f(R)$ esbarra em pelo menos dois desafios: a escolha de uma forma funcional e, após isso, a escolha do formalismo variacional. Neste sentido, as várias discussões existentes na literatura apenas evidenciam que esses dois problemas ainda carecem de definição, ou de uma clara indicação da solução. Vimos, no entanto, que seja qual for o modelo $f(R)$ e o formalismo adotado, a teoria resultante deverá satisfazer condições de viabilidade mencionadas na seção 4.6.

Nesta tese, nós apresentamos e discutimos as consequências cosmológicas de três formas funcionais $f(R)$ no formalismo de Palatini. Nossos resultados observacionais demonstraram a viabilidade dessas teorias quando se considera a história da expansão cósmica, uma vez que suas equações de campo permitem a existência das três fases pós-inflacionárias da evolução cosmológica.

Esta tese consistiu de duas partes. Na parte I, apresentamos os principais conceitos teóricos necessários ao entendimento dos trabalhos realizados. Após a tese ser introduzida no capítulo 1, revisamos no capítulo 2 os principais conceitos teóricos e observacionais que a base do Modelo Cosmológico Padrão. No capítulo 3, introduzimos algumas alternativas à RG e ao MCP, levando em consideração seus problemas. No capítulo 4 apresentamos os fundamentos, alguns aspectos observacionais e as principais motivações por trás das teorias $f(R)$ e discutimos ainda as características dos formalismos métrico e de Palatini, além das divergências entre ambos. A contribuição original dos nossos trabalhos para a comunidade foi apresentada na parte II, especificamente nos capítulos 5, 6 e 7.

No capítulo 5 nós introduzimos o modelo $f(R)$ exponencial e investigamos suas consequências cosmológicas à luz dos dados observacionais da taxa de expansão cósmica e de SNs Ia.

Os resultados de melhor ajuste exibem uma boa concordância entre as observações utilizadas nos testes realizados e as previsões teóricas do modelo. Diferentemente do comportamento dinâmico de outros cenários $f(R)$ discutidos na literatura (seja no formalismo métrico ou no de Palatini), nós mostramos a possibilidade de uma aceleração cósmica transiente em que modificações da gravidade em grandes escalas irá conduzir o Universo a uma era dominada pela matéria no futuro. Como mencionado anteriormente, este tipo de solução está em pleno acordo com requerimentos teóricos da teoria de cordas e de teoria M, como pode ser visto em Fischler et al. (2001). Mostramos também que este modelo, quando investigado no formalismo de Palatini, prevê a dinâmica de *background* similar à do cenário Λ CDM em altos *redshifts*, e proporciona a usual fase dominada pela matéria seguida por uma fase de aceleração recente.

No capítulo 6 nós utilizamos o *ansatz* proposto por Hu & Sawicki (2007) no formalismo métrico e investigamos suas propriedades no formalismo Palatini. Através da comparação entre os dados observacionais da taxa de expansão cósmica, SNs Ia, CMB/BAO com dados da fração de massa de gás em aglomerados de galáxias, as consequências cosmológicas deste modelo foram estudadas. Os melhores ajustes encontrados para os parâmetros Ω_{m0} e c_2 permitem a sequência desejada das eras cosmológicas radiação-matéria-aceleração, o que demonstra sua viabilidade sob este aspecto. No entanto, ao contrário dos resultados obtidos para o modelo exponencial, o modelo de Hu-Sawicki não exibe uma história de aceleração transiente no futuro, pelo menos não para os valores encontrados nesta análise.

Por fim, no capítulo 7 nós introduzimos o modelo lei-de-potência e apresentamos novos resultados utilizando a abordagem de Palatini e investigamos a influência dos dados da fração de massa de gás sobre o espaço paramétrico do modelo. Os valores de melhor ajuste dos parâmetros Ω_{m0} e n permitem a sequência esperada das eras cosmológicas radiação-matéria-aceleração, demonstrando assim a sua viabilidade neste sentido. Isto contrasta com os resultados de Amendola et al. (2007b) para a gravidade $f(R)$ para esta classe de modelos. Mostramos também que o caso padrão Λ CDM é permitido por nossas análises no intervalo de confiança de 99,73%, levando-se em conta a combinação dos dados de $f_{gás}$ com dados de SNs Ia, CMB/BAO e $H(z)$. Além disso, nossos resultados corroboram conclusões anteriores sobre este modelo no formalismo de Palatini utilizando dados observacionais como SNs Ia, BAO e CMB, mas se distingue dos apresentados por Capozziello et al. (2006a), no qual os autores realizaram o mesmo teste cosmológico aplicado neste capítulo (embora com uma amostra diferente).

É importante enfatizar que, embora já tenha sido demonstrado que os cenários cosmológicos que surge no formalismo métrico dos modelos 5.4 e 6.4 satisfazem as condições necessárias para produzir uma história da expansão cosmológicamente viável, a versão de Palatini dessas funções não havia sido investigado ainda e, neste caminho, alguns resultados interessantes ainda podem surgir em um futuro próximo. Seria interessante, por exemplo, executar uma análise cosmográfica no formalismo de Palatini para este modelo, tal como o realizado no formalismo métrico por Capozziello et al. (2008). A combinação desta tarefa com os resultados apresentados aqui pode melhorar as restrições do cenário Hu-Sawicki e testar sua viabilidade observacional.

Vale lembrar também que todas as análises realizadas nesta tese testam os modelos proposto em nível de *background*. Como vimos no capítulo 4, devemos também estudar os efeitos de perturbações cosmológicas se quisermos verificar a completa viabilidade observacional destes cenários $f(R)$. Do ponto de vista observacional, é impossível distinguir modelos de quintessên-

cia com $w \rightarrow -1$ da constante cosmológica. Modelos $f(R)$, por outro lado, prevêem uma expansão de *background* do tipo Λ CDM, mas uma diferente dinâmica de formação de estruturas.

Neste sentido, medir a taxa de crescimento das flutuações de densidade no Universo fornece um forte teste para modelos $f(R)$, uma vez que diferentes modelos de gravidade modificada fornecem diferentes taxas de crescimento. Uma descrição detalhada das equações das perturbações lineares da densidade de matéria para as teorias $f(R)$ podem ser encontradas em Carroll et al. (2006), Tsujikawa (2007). Recentes *surveys* de galáxias forneceram medidas da taxa de crescimento $f_m(z)$ ou $f_m(z)\sigma_8(z)$ até cerca de $z \approx 1$, onde $f_m \equiv d \ln \delta_m / d \ln a$, δ_m é a sobredensidade fracional da matéria não-relativística, e σ_8 é o valor quadrático médio da amplitude da sobredensidade na escala comóvel de $8h^{-1}$ Mpc. Estas medidas observacionais de $f_m(z)\sigma_8(z)$ podem ser comparadas com a evolução de δ_m e f_m , obtidos a partir da equação

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{\text{eff}}\rho_m\delta_m \simeq 0. \quad (8.1)$$

O crescimento e evolução das perturbações escalares em teorias de gravidade $f(R)$ já foi investigado tanto no formalismo métrico (Carroll et al. 2006, Song et al. 2007) quanto no formalismo de Palatini Amarzguioui et al. (2006), Carroll et al. (2006). Dois diferentes formalismos desenvolvidos nas referências Hwang & Noh (2002), Koivisto & Kurki-Suonio (2006) e Lue et al. (2004) foram comparados para o modelo $f(R) = R - \mu^{2(n+1)}/R^n$ e foi mostrado que ambos os formalismos estão em concordância em cenários que são próximos (no espaço de parâmetros) ao modelo Λ CDM, mas fornecem resultados diferentes para modelos que diferem significativamente do modelo de concordância padrão. Isto sinaliza a necessidade de se testar a validade de análises de perturbação para teorias que diferem significativamente da relatividade geral em alguns aspectos. Finalmente, é importante ressaltar que, apesar dos últimos esforços terem fornecido informações importantes a respeito da teoria de gravidade a ser adotada, tanto a forma da função $f(R)$ como o formalismo variacional ainda permanecem como desafios a serem superados e um estudo sistemático das perturbações cosmológicas nessas teorias pode nos fornecer um caminho a ser seguido.

A Observáveis utilizados nos testes cosmológicos

O objetivo principal dos testes cosmológicos é derivar, a partir desses observáveis, limites para os principais parâmetros dos modelos cosmológicos a serem estudados. No caso desta tese, estes modelos foram representados pelas teorias $f(R)$ investigadas nos capítulos 5, 6 e 7. Os testes cosmológicos utilizados foram, a saber: a relação magnitude-*redshift* de SNs Ia; estimativas da taxa de expansão cósmica; medições da fração de massa de gás em aglomerados de galáxias; e a razão CMB/BAO. Veremos adiante uma breve descrição deles.

A.1. Relação magnitude-*redshift* de SNs Ia

Historicamente, a magnitude aparente (observada) m é utilizada como uma medida do brilho dos objetos astronômicos. Ela é definida de modo que, se dois objetos possuem fluxos aparentes F_1 e F_2 , suas magnitudes aparentes m_1 e m_2 estão relacionadas com seus respectivos fluxos aparentes de acordo com (Amendola & Tsujikawa 2010)

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right). \quad (\text{A.1})$$

Desta definição, a magnitude aparente é menor para objetos de maior brilho. Uma estrela com $m = 1$, por exemplo, terá um brilho cerca de 100 vezes maior que o de uma estrela com $m = 6$. Substituindo a definição de distância luminosidade (2.44) na equação acima obtemos

$$m_1 - m_2 = 5 \log_{10} \left(\frac{d_{L1}}{d_{L2}} \right) - 2,5 \log_{10} \left(\frac{L_1}{L_2} \right). \quad (\text{A.2})$$

Vamos agora analisar a Eq. (A.2) pensando apenas em um único objeto, de magnitude aparente m_1 . Podemos definir a magnitude absoluta M deste objeto se considerarmos m_2 como sendo sua magnitude aparente caso ele estivesse a uma distância de $d_L = 10$ parsecs para o observador. Então, fazendo $m_1 = m$ e $m_2 = M$ na Eq. (A.2) temos

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right), \quad (\text{A.3})$$

onde fizemos $d_{L1} = d_L$, $d_{L2} = 10 \text{ pc}$ e $L_1 = L_2 = L$, uma vez que estamos tratando apenas de um único objeto. Se escrevermos d_L em unidades de Megaparsecs, esta relação pode ser escrita como

$$\mu(z) = m - M = 5 \log_{10}[d_L(z)]_{\text{Mpc}} + 25, \quad (\text{A.4})$$

onde μ é o chamado *módulo de distância* e é a quantidade comumente utilizada nos testes cosmológicos envolvendo medidas de magnitude.

Em princípio, a relação magnitude-*redshift* acima pode ser utilizada para fornecer fortes vínculos sobre os valores dos principais parâmetros cosmológicos tais como H_0 , q_0 e os parâmetros de densidade. Na prática, o problema consiste em se encontrar uma vela-padrão cuja luminosidade intrínseca seja conhecida, de maneira a ter-se $\mu(z)$ como a grandeza “observável”. Em *redshifts* moderados ($z \lesssim 1$), a evolução da luminosidade de galáxias produz efeitos mais significativos do que aqueles previstos pela cosmologia adotada, de modo que, se queremos utilizar galáxias nesse teste, é necessário um melhor entendimento da evolução de galáxias do que o atual. Contudo, sabe-se que as supernovas tipo Ia representam o melhor tipo de vela-padrão conhecido nos dias atuais, tanto que este fato foi utilizado no fim da década de 90, quando descobriu-se que supernovas tipo Ia em altos *redshifts* eram menos brilhantes que o esperado, levando à crença atual de que o Universo passa por uma fase de expansão acelerada.

As supernovas podem ser classificadas de acordo com seus processos de formação e as linhas de absorção de seus elementos químicos. A formação de supernovas tipo Ia ocorre em sistemas binários quando a massa de uma anã branca supera o limite de Chandrasekhar (Chandrasekhar 1931) após consumir o gás de uma estrela vizinha. Uma vez que a luminosidade absoluta de uma SN Ia é aproximadamente constante no máximo do brilho, o que a torna uma “vela-padrão”, a distância de uma SN Ia pode ser determinada pela observação de sua luminosidade aparente. As observações de muitas SNs Ia fornecem a dependência de $\mu(z)$ com o *redshift*. Comparando os dados observacionais com o módulo de distância teórico* da Eq. (A.4) é possível conhecer a evolução da expansão do Universo para *redshifts* $z \lesssim 1,5$.

O número e a qualidade dos dados de SNs Ia disponíveis para estudos cosmológicos têm aumentado consideravelmente nos últimos anos. Desde as descobertas de Riess e Perlmutter no final dos anos 90, mais dados têm sido coletados por diversas missões observacionais. Dentre elas, além do HST mencionado no capítulo 2, podemos citar também o SNLS (“*SuperNova Legacy Survey*”) (Astier et al. 2006) e o ESSENCE (“*Equation of State: SuperNovae trace Cosmic Expansion*”) (Riess et al. 2004, 2007). Em praticamente todas as análises envolvendo os resultados dessas e de outras missões, modelos envolvendo aceleração têm sido favorecidos. Um dos conjuntos de dados mais atualizados foi compilado por Amanullah et al. (2010), o chamado *Union2*. Esta amostra, que compreende 557 eventos entre $z = 0,015$ e $z = 1,4$, utiliza o filtro SALT2 para o ajuste da curva de luz das SNs Ia e é uma atualização da compilação *Union* original (Kowalski et al. 2008), incluindo grandes amostras recentes de outras missões. Recentemente, surgiu uma nova atualização desta compilação, o *Union2.1* (Suzuki et al. 2012), que contém 580 eventos compreendidos no intervalo $0,015 \leq z \leq 1,414$.

* Pode-se notar que a distância luminosidade teórica da Eq. (2.50) pode ser comparada com a distância luminosidade calculada a partir das observações de magnitude aparente $m(z)$, através da Eq. (A.4). Amendola & Tsujikawa (2010) apresentam alguns exemplos de como a distância luminosidade pode ser obtida observacionalmente.

A.2. Taxa da expansão cósmica

Atualmente, o teste da taxa da expansão cósmica é baseado na crença de que as galáxias luminosas vermelhas (LRGs)[†] podem nos fornecer medidas diretas de $H(z)$ (Jimenez & Loeb 2002) (veja também Zhang & Ma 2010, para uma recente revisão sobre como medidas de $H(z)$ podem ser obtidas a partir de diferentes técnicas). Jimenez & Loeb (2002) apresentaram um método que consiste na medição da diferença nas idades de duas galáxias luminosas vermelhas em diferentes *redshifts* para se obter a razão $\Delta z/\Delta t$. Com isto, o parâmetro de Hubble em z pode ser aproximado utilizando-se a derivada do tempo cósmico com relação ao *redshift*, ou seja,

$$H(z) \equiv \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{z}}{(1+z)} \simeq -\frac{1}{(1+z)} \frac{\Delta z}{\Delta t}. \quad (\text{A.5})$$

Os dados da taxa da expansão utilizados em nossas análises foram obtidos de Stern et al. (2010) que, utilizando uma amostra do GDDS (*Gemini Deep Deep Survey*) (McCarthy et al. 2004) e compilações de dados de (Dunlop et al. 1996, Spinrad et al. 1997, Nolan et al. 2001), calcularam 11 pontos de $H(z)$ no intervalo de *redshift* $0,1 \leq z \leq 1,75$. Destes pontos, substituímos o valor da constante de Hubble pela estimativa fornecida por Riess et al. (2011), $H_0 = 73,4 \pm 2,8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

A.3. Fração de massa de gás em aglomerados de galáxias

O teste da fração de massa de gás ($f_{\text{gás}}$) — daqui em diante chamado *fração de gás* — é baseado na suposição de que a fração de massa de um aglomerado galáctico virializado é aproximadamente constante e uma boa representação do conteúdo material do próprio Universo (Sasaki 1996, Allen et al. 2008, Etori et al. 2009). Para definirmos as expressões relacionadas com a quantidade $f_{\text{gás}}$ e que foram utilizadas em nossas análises, vamos iniciar pela mais fundamental delas, a fração de massa bariônica

$$f_{\text{bar}} \equiv \frac{M_{\text{bar}}}{M_{\text{total}}}, \quad (\text{A.6})$$

onde M_{bar} é a massa da matéria bariônica e M_{total} é a massa total (matéria bariônica + matéria escura). A massa bariônica é a soma do conteúdo material do gás do meio intra-aglomerado e a matéria contida nas estrelas, planetas etc. Seguindo Lagana et al. (2008), nós modelamos a massa bariônica como função da fração de gás como

$$f_{\text{bar}} = (1.18 - 0.012T_{\text{gás}})f_{\text{gás}}, \quad (\text{A.7})$$

onde $T_{\text{gás}}$ é a temperatura do meio intra-aglomerado. Da suposição de que os aglomerados de galáxias fornecem uma boa representação do conteúdo material do Universo (White et al. 1993), a fração da matéria bariônica em nos aglomerados é similar à razão entre o parâmetro de densidade bariônica Ω_b e o parâmetro de densidade da matéria total Ω_m . Assim,

$$f_{\text{bar}} = b \frac{\Omega_b}{\Omega_m}. \quad (\text{A.8})$$

[†] Do inglês “*Luminous Red Galaxies*”.

Na expressão acima, o fator b é estimado por meio de simulações computacionais que sugerem que a fração de gás é ligeiramente menor do que fração cósmica devido a processos que convertem parte do gás em estrelas ou ejetam este gás para fora do próprio aglomerado. Por este motivo, este parâmetro quantifica o desvio da suposição de que a fração de massa bariônica permanece constante ao longo da história do Universo. Finalmente, a fração de gás é proporcional à distância luminosidade d_L e à distância diâmetro angular d_A de tal maneira que $M_{\text{gás}}/M_{\text{total}} \propto d_L d_A^{1/2}$ (Sasaki 1996).

Assumindo a relação de dualidade (2.54), nós temos $f_{\text{gás}} \propto d_A^{3/2}$. Uma vez que $f_{\text{gás}} d_A^{-3/2}$ é constante e independente dos parâmetros cosmológicos, nós determinamos a fração de gás para um dado modelo fiducial denotado pelo índice “**”

$$f_{\text{gás}}^* = f_{\text{gás}}(d_A^*/d_A)^{3/2}, \quad (\text{A.9})$$

onde $f_{\text{gás}}$ é obtida combinando-se as Eqs. (A.7) e (A.8),

$$f_{\text{gás}} = b \frac{\Omega_b}{(1.18 - 0.012 T_{\text{gás}}) \Omega_m}. \quad (\text{A.10})$$

Seguindo Etori et al. (2009), nós assumimos que $\Omega_b h^2 = 0,0462 \pm 0,0012$ e $b = 0,874 \pm 0,023$. Substituindo esta equação em (A.9), nossa expressão teórica para $f_{\text{gás}}$ é escrita como

$$f_{\text{gás}}^* = b \frac{\Omega_b}{(1.18 - 0.012 T_{\text{gás}}) \Omega_m} \left[\frac{d_A^*}{d_A} \right]^{3/2}. \quad (\text{A.11})$$

Ajustando $f_{\text{gás}}^*$ aos dados observacionais, é possível restringir os parâmetros cosmológicos em d_A . Em nossas análises, nós consideramos o conjunto de dados apresentados por Etori et al. (2009) que consiste em 57 aglomerados galácticos luminosos em raios-X e observados pelo *Chandra X-ray Observatory*. Destes 57 objetos, 49 se encontram no intervalo de *redshift* entre 0,3 e 1,273 e foram selecionados de Balestra et al. (2007) com o critério $T_{\text{gás}} > 4 \text{ KeV}$. Os 8 aglomerados restantes se encontram no intervalo entre 0,06 e 0,23, e foram selecionados de Vikhlinin et al. (2006) com $T_{\text{gás}} > 4 \text{ KeV}$.

A.4. Razão CMB/BAO

Em nossas análises, também utilizamos os vínculos fornecidos através da combinação de informações provenientes da CMB e das oscilações acústicas bariônicas. A utilização de informações da CMB e de BAO é importante no sentido de que elas vinculam o modelo investigado às observações tanto em baixos como também em altos *redshifts*.

Oscilações acústicas bariônicas são flutuações periódicas e regulares na densidade da matéria bariônica, causadas pelas ondas acústicas existentes no Universo primordial. Do mesmo modo que as SNs Ia podem ser assumidas como “velas padrão” para as observações astronômicas, o “fóssil” das oscilações de densidade do plasma primordial fornece uma “régua padrão” para as escalas de comprimento em cosmologia. O comprimento desta régua padrão — aproximadamente $4,9 \times 10^8$ anos-luz no Universo atual — pode ser medido pela observação da estrutura

Tabela A.1.: Dados de CMB/BAO utilizados em nossas análises.

z_{BAO}	$\frac{d_{\text{C}}(z_*)}{D_{\text{V}}(z_{\text{BAO}})}$
0,106	$30,95 \pm 1,50$
0,200	$17,55 \pm 0,65$
0,350	$10,10 \pm 0,38$
0,440	$8,44 \pm 0,67$
0,600	$6,69 \pm 0,34$
0,600	$6,47 \pm 0,32$
0,730	$5,45 \pm 0,31$

de grande escala da distribuição de matéria por meio de missões astronômicas (Eisenstein et al. 2005). Não vamos descrever os processos envolvidos com estas oscilações. Convidamos o leitor a ver em Eisenstein (2005) uma descrição física sobre este tema. Aqui, vamos nos restringir às quantidades relevantes em nossas análises.

Seguindo Sollerman et al. (2009), nós utilizamos os vínculos derivados do produto da escala acústica da CMB

$$\ell_{\text{A}}(z_*) = \pi d_{\text{C}}(z_*)/r_{\text{s}}(z_*), \quad (\text{A.12})$$

e a estimativa da razão entre a escala do horizonte sonoro na época de arrasto[‡] e a escala de dilatação das oscilações acústicas bariônicas, $r_{\text{s}}(z_{\text{d}})/D_{\text{V}}(z_{\text{BAO}})$. Com isto, o observável CMB/BAO é dado por

$$\frac{d_{\text{C}}(z_*)}{D_{\text{V}}(z_{\text{BAO}})} = \frac{[\ell_{\text{A}}(z_*)]}{\pi} \left[\frac{r_{\text{s}}(z_{\text{d}})}{D_{\text{V}}(z_{\text{BAO}})} \right] \frac{1}{\left[\frac{r_{\text{s}}(z_{\text{d}})}{r_{\text{s}}(z_*)} \right]}. \quad (\text{A.13})$$

Nas expressões acima, $d_{\text{C}}(z_*)$ é a distância comóvel no *redshift* da recombinação, $z_* = 1089$. Sua fórmula é bem aproximada pela fornecida por Hu & Sugiyama (1996). Variações em torno deste valor de z_* não alteram os resultados de maneira significativa (Sollerman et al. 2009). $r_{\text{s}}(z_*)$ é o horizonte sonoro comóvel na época do desacoplamento dos fótons dado por

$$r_{\text{s}}(z_*) = \frac{c_{\text{s}}}{\sqrt{3}} \int_0^{1/(1+z_*)} \frac{da}{a^2 H(a) \sqrt{1 + \left(\frac{3\Omega_{\text{b}0}}{4\Omega_{\gamma 0}} \right) a}}, \quad (\text{A.14})$$

que depende da velocidade do som antes da recombinação, c_{s} . Na expressão acima, $\Omega_{\text{b}0}$ e $\Omega_{\gamma 0}$ são os valores atuais dos parâmetros de densidade de bárions e fótons, respectivamente. Komatsu et al. (2011) fornecem os valores $\Omega_{\text{b}0} = 0,022765h^{-2}$ e $\Omega_{\gamma 0} = 2,469 \times 10^{-5}h^{-2}$. $z_{\text{d}} \simeq 1020$ é o *redshift* da época de arrasto e sua fórmula em função dos parâmetros de densidade é dada por Eisenstein & Hu (1998). D_{V} é a chamada *escala de dilatação*, dada por (Eisenstein et al. 2005)

$$D_{\text{V}}(z) \equiv \left[\frac{cz}{H(z)} d_{\text{C}}^2(z) \right]^{1/3}. \quad (\text{A.15})$$

[‡] É a época em que as oscilações acústicas de bárions após a recombinação se “congelam”, fornecendo as ondulações que vemos hoje na distribuição de matéria.

Vamos agora voltar nossa atenção aos termos entre colchetes no lado direito da Eq. (A.13). Os resultados do sétimo ano do WMAP (Jarosik et al. 2011) fornecem $\ell_A = 302,44 \pm 0,8$. A razão $r_s(z_d)/D_V(z_{\text{BAO}})$ foi primeiro estimada por Percival et al. (2010) em $z_{\text{BAO}} = 0,2$ e $z_{\text{BAO}} = 0,35$. Após isso, os resultados do *6dF Galaxy Survey* (Beutler et al. 2011) forneceram uma nova estimativa desta razão em $z_{\text{BAO}} = 0,106$. Mais recentemente, a colaboração *WiggleZ* (Blake et al. 2011b) obteve esta quantidade em $z_{\text{BAO}} = 0,44$, $z_{\text{BAO}} = 0,6$ e $z_{\text{BAO}} = 0,73$. Por fim, a razão $r_s(z_d)/r_s(z_*) = 1,044 \pm 0,019$ foi calculada por Komatsu et al. (2011). Os dados obtidos após a combinação destes termos são mostrados na tabela A.1.

B Ferramentas estatísticas

A tarefa de se determinar quais modelos cosmológicos ou gravitacionais são adequados à luz das informações empíricas tem se tornado bastante intensa, principalmente com a evolução da cosmologia observacional ao longo dos anos. Basicamente, esta tarefa consiste em se ajustar os parâmetros livres do modelo de interesse às observações. Neste sentido, diversos métodos estatísticos tem se mostrado de grande utilidade tanto na inferência de parâmetros quanto na seleção de modelos cosmológicos/gravitacionais. De fato, esta foi a tarefa empregada na estimativa dos parâmetros dos modelos investigados nesta tese. Introduziremos, neste apêndice a ferramenta estatística utilizada nos trabalhos descritos nos capítulos 5, 6 e 7.

B.1. Teste de χ^2 e regiões de confiança

Nosso principal objetivo quando procuramos ajustar um determinado modelo aos dados observacionais disponíveis é minimizar uma determinada função de mérito que quantifique a discrepância entre os valores observados de uma determinada quantidade e aqueles previstos pela teoria em questão. Em outras palavras, a comparação entre teoria e observação é realizada calculando-se o valor teórico da quantidade $y^{\text{teo}}(x_i|\mathbf{P})$ para determinados valores dos parâmetros livres da teoria $\mathbf{P} = p_1, p_2, \dots$, e comparando-o com o seu valor observado $y_i^{\text{obs}}(x_i)$.

Uma função de mérito extensivamente utilizada para este fim é a função χ^2 . O método de minimização de χ^2 — ou dos *mínimos quadrados* — é amplamente aplicado na inferência de parâmetros e ajuste de modelos*. Embora, por si só esta técnica não ofereça todas as respostas acerca da relação entre o modelo testado e os dados utilizados, ela pode fornecer resultados para os três objetivos básicos de um procedimento de ajuste:

1. Fornecer estimativas (o melhor ajuste) dos parâmetros livres,
2. fornecer os erros associados aos parâmetros livres, e
3. fornecer uma medida da qualidade do ajuste.

Um resultado insatisfatório para o terceiro item geralmente implica na ausência de sentido dos resultados dos itens 1 e 2.

* É um dos métodos mais utilizados por frequentistas, se não o mais utilizado.

Para um teste observacional com N medidas de (x_i, y_i^{obs}) e de erros σ_i , a discrepância entre teoria e observação é quantificada pela função

$$\chi^2(\mathbf{P}) \equiv \sum_{i=1}^N \frac{y_i^{\text{obs}}(x_i) - y^{\text{teo}}(x_i|\mathbf{P})}{\sigma_i^2}. \quad (\text{B.1})$$

Se os dados são correlacionados, o χ^2 torna-se

$$\chi^2(\mathbf{P}) \equiv \sum_{i,j=1}^N \left[y_i^{\text{obs}}(x_i) - y^{\text{teo}}(x_i|\mathbf{P}) \right] C_{ij}^{-1} \left[y_j^{\text{obs}}(x_j) - y^{\text{teo}}(x_j|\mathbf{P}) \right], \quad (\text{B.2})$$

onde C_{ij}^{-1} é o inverso da matrix de covariância descrevendo a covariância entre os dados, dada por

$$C_{ij} = \left\langle \left[y_i^{\text{obs}}(x_i) - y^{\text{teo}}(x_i|\mathbf{P}) \right] \left[y_j^{\text{obs}}(x_j) - y^{\text{teo}}(x_j|\mathbf{P}) \right] \right\rangle. \quad (\text{B.3})$$

Quando nos referimos ao melhor ajuste de um modelo, estamos fazendo menção aos valores dos parâmetros livres \mathbf{P} que minimizam esta função, ou seja, que fornecem um $\chi_{\text{mín}}^2$. No caso em que a distribuição dos erros σ_i é Gaussiana, minimizar a função (B.1) é equivalente à maximizar a probabilidade

$$\mathcal{L} \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \chi^2(\mathbf{P}) \right]. \quad (\text{B.4})$$

O método de minimização utilizado em nossos trabalhos consistiu na busca através da grade dos parâmetros livres. Neste método, se considera um intervalo razoável para os parâmetros livres do modelo, com a esperança que o valor $\chi_{\text{mín}}^2$ seja encontrado naquela região. Preferencialmente, esta região é delimitada pelos limites físicos dos parâmetros livres, a menos que se possua alguma informação adicional sobre algum(uns) parâmetro(s).

A grade dos parâmetros pode ser utilizada na estimativa dos erros associados aos parâmetros livres. Estes erros — ou *intervalos de confiança* — são frequentemente estimados pela obtenção das chamadas curvas de nível de χ^2 . Pode-se mostrar que as curvas de nível de χ^2 no espaço paramétrico correspondem a certos níveis de probabilidade (Press et al. 1992). Cada nível é dado por $\Delta\chi^2 = \chi^2 - \chi_{\text{mín}}^2$ e corresponde a uma probabilidade de os parâmetros estarem dentro do intervalo delimitado pelo nível. Também pode-se mostrar que esta probabilidade depende do número de graus de liberdade ν , definido como

$$\nu \equiv \text{n}^\circ \text{ de pontos} - \text{n}^\circ \text{ de parâmetros livres}. \quad (\text{B.5})$$

Finalmente, uma regra geral para se verificar a qualidade do ajuste é que o valor de $\chi_{\text{mín}}^2$ para um ajuste razoável deve ser próximo do número de graus de liberdade ν . Portanto, valores de $\chi_r^2 \equiv \chi_{\text{mín}}^2/\nu \sim 1$ geralmente indicam um bom ajuste. Precisamente falando, a função χ^2 torna-se normalmente distribuída para altos valores de ν , com média ν e desvio padrão $\sqrt{2\nu}$.

Tabela B.1.: $\Delta\chi^2$ como função do nível de confiança e graus de liberdade. Tabela reproduzida de Press et al. (1992).

ν	68,3%	95,4%	99,73%
1	1,00	4,00	9,00
2	2,30	6,17	11,80
3	3,53	8,02	14,20
4	4,72	9,70	16,30

B.2. Marginalização de parâmetros

Um outro conceito importante a ser descrito é o da *marginalização* (Gregory 2005). Não são poucos os casos em que algum (ou alguns) dos parâmetros do modelo não são de muito interesse para o estudo a ser realizado. Um exemplo disso em nossas análises foi a constante de Hubble H_0 . Considere que os parâmetros de um determinado modelo são $\mathbf{P} = \{p_1, p_2\}$. Se nós queremos saber a distribuição de probabilidade do parâmetro p_1 a despeito dos valores de p_2 , podemos resolver este problema somando a distribuição de probabilidade sobre todos os valores possíveis que o parâmetro p_2 pode assumir[†]. No caso de variáveis contínuas — o que ocorre mais frequentemente — a marginalização é realizada pela integral

$$\mathcal{L}(p_1) = \int dp_2 \mathcal{L}(p_1, p_2), \quad (\text{B.6})$$

No caso em que a distribuição de erros dos dados é Gaussiana, podemos utilizar a probabilidade (B.4) e minimizar a função

$$\tilde{\chi}^2(p_1) = -2 \ln \mathcal{L}(p_1) = -2 \ln \left[\int dp_2 e^{-\frac{1}{2}\chi^2(p_1, p_2)} \right]. \quad (\text{B.7})$$

As Eqs. (B.6) e (B.7) podem ser diretamente generalizadas para o caso de mais de dois parâmetros. Dependendo da situação, esta integral pode ser resolvida analiticamente, como é o caso da marginalização envolvendo testes de SNs Ia (Di Pietro & Claeskens 2003).

[†] É claro que, computacionalmente, não será possível realizar esta tarefa caso pelo menos um dos valores limite do parâmetro seja infinito. A solução neste caso é considerar uma região na qual o valor do parâmetro seja aceitável fisicamente, ou na qual já se tenha alguma segurança de que esta região compreende uma grande parte da distribuição de sua probabilidade. No entanto, mesmo para casos deste tipo, o problema ainda poderá ser resolvido se for realizada uma mudança de variáveis pertinente (veja a seção 4.4 de Press et al. 1992, para uma descrição de alguns métodos que solucionam este problema computacionalmente em linguagem FORTRAN).

Referências

- Ade, P. A. R. et al. (2013), [Planck Collaboration]. “Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters”. {arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO]}. [pg: 33]
- Alcaniz, J. S. (2002). “Some observational consequences of brane world cosmologies”. *Physical Review D* **65**:123514, {arXiv:astro-ph/0202492}. [pg: 39]
- Alcaniz, J. S. (2004). “Testing dark energy beyond the cosmological constant barrier”. *Physical Review D* **69**:083521, {arXiv:astro-ph/0312424}. [pg: 38]
- Alcaniz, J. S. (2006). “Dark energy and some alternatives: A brief overview”. *Brazilian Journal of Physics* **36**:1109, {arXiv:astro-ph/0608631}. [pg: 33]
- Alcaniz, J. S. & Lima, J. A. S. (1999). “New limits on Ω_Λ and Ω_m from old galaxies at high redshift”. *The Astrophysical Journal, Letters* **521**:L87, {arXiv:astro-ph/9902298}. [pg: 3]
- Alcaniz, J. S. & Lima, J. A. S. (2001). “Dark energy and the epoch of galaxy formation”. *The Astrophysical Journal* **550**:L133, {arXiv:astro-ph/0101544}. [pg: 38]
- Alcaniz, J. S. & Lima, J. A. S. (2005). “Interpreting cosmological vacuum decay”. *Physical Review D* **72**:063516, {arXiv:astro-ph/0507372}. [pg: 36]
- Alcaniz, J. S., Silva, R., Carvalho, F. C., & Zhu, Z.-H. (2009). “Hybrid dark energy”. *Classical and Quantum Gravity* **26**:105023, {arXiv:0807.2633 [astro-ph]}. [pg: 75]
- Allemandi, G., Capone, M., Capozziello, S., & Francaviglia, M. (2006). “Conformal aspects of Palatini approach in extended theories of gravity”. *General Relativity and Gravitation* **38**:33, {arXiv:hep-th/0409198}. [pg: 49, 62]
- Allen, S. W., Rapetti, D. A., Schmidt, R. W., Ebeling, H., Morris, G., et al. (2008). “Improved constraints on dark energy from Chandra X-ray observations of the largest relaxed galaxy clusters”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **383**:879–896, {arXiv:0706.0033 [astro-ph]}. [pg: 91, 103]
- Allen, S. W., Schmidt, R. W., Ebeling, H., Fabian, A. C., & van Speybroeck, L. (2004). “Constraints on dark energy from Chandra observations of the largest relaxed galaxy clusters”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **353**:457, {arXiv:astro-ph/0405340}. [pg: 91]
- Allen, S. W., Schmidt, R. W., & Fabian, A. C. (2002). “Cosmological constraints from the X-ray gas mass fraction in relaxed lensing clusters observed with Chandra”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **334**:L11, {arXiv:astro-ph/0205007}. [pg: 84, 91]
- Amanullah, R., Lidman, C., Rubin, D., Aldering, G., Astier, P., et al. (2010), [Supernova Cosmology Project]. “Spectra and light curves of six type Ia supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the Union2 Compilation”. *The Astrophysical Journal* **716**:712, {arXiv:1004.1711 [astro-ph.CO]}. [pg: 72, 73, 102]
- Amarzguioui, M., Elgaroy, O., Mota, D. F., & Multamaki, T. (2006). “Cosmological constraints

- on $f(R)$ gravity theories within the palatini approach”. *Astronomy and Astrophysics* **454**:707, {arXiv:astro-ph/0510519}. [pg: 5, 62, 90, 92, 94, 99]
- Amendola, L. (2000). “Coupled quintessence”. *Physical Review D* **62**:043511, {arXiv:astro-ph/9908023}. [pg: 58]
- Amendola, L., Gannouji, R., Polarski, D., & Tsujikawa, S. (2007a). “Conditions for the cosmological viability of $f(R)$ dark energy models”. *Physical Review D* **75**:083504, {arXiv:gr-qc/0612180}. [pg: 42, 69, 90, 95]
- Amendola, L., Polarski, D., & Tsujikawa, S. (2007b). “Are $f(R)$ dark energy models cosmologically viable?”. *Physical Review Letters* **98**:131302, {arXiv:astro-ph/0603703}. [pg: 5, 62, 75, 85, 90, 95, 98]
- Amendola, L., Polarski, D., & Tsujikawa, S. (2007c). “Power-laws $f(R)$ theories are cosmologically unacceptable”. *International Journal of Modern Physics D* **16**:1555, {arXiv:astro-ph/0605384}. [pg: 90]
- Amendola, L. & Tsujikawa, S. (2008). “Phantom crossing, equation-of-state singularities, and local gravity constraints in $f(R)$ models”. *Physics Letters B* **660**:125, {arXiv:0705.0396 [astro-ph]}. [pg: 42, 61, 69]
- Amendola, L. & Tsujikawa, S. (2010). *Dark energy: Theory and observations*. Cambridge University Press, Nova York, NY, EUA, {ADS:2010deto.book....A}. [pg: 18, 24, 46, 101, 102]
- Appleby, S. A. & Battye, R. A. (2007). “Do consistent $F(R)$ models mimic General Relativity plus Λ ?”. *Physics Letters B* **654**:7, {arXiv:0705.3199 [astro-ph]}. [pg: 42, 69]
- Astier, P. et al. (2006), [SNLS Collaboration]. “The Supernova Legacy Survey: Measurement of Ω_m , Ω_Λ and w from the first year data set”. *Astronomy and Astrophysics* **447**:31, {arXiv:astro-ph/0510447}. [pg: 3, 34, 102]
- Balbi, A., Ade, P., Bock, J., Borrill, J., Boscaleri, A., et al. (2000). “Constraints on cosmological parameters from MAXIMA-1”. *The Astrophysical Journal* **545**:L1, {arXiv:astro-ph/0005124}. [pg: 17]
- Balestra, I., Tozzi, P., Ettori, S., Rosati, P., Borgani, S., et al. (2007). “Tracing the evolution in the Iron content of the ICM”. *Astronomy and Astrophysics* **462**:429, {arXiv:astro-ph/0609664}. [pg: 104]
- Bamba, K., Geng, C.-Q., & Lee, C.-C. (2010). “Cosmological evolution in exponential gravity”. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **1008**:021, {arXiv:1005.4574 [astro-ph.CO]}. [pg: 69, 70]
- Barausse, E., Sotiriou, T. P., & Miller, J. C. (2008a). “A No-go theorem for polytropic spheres in Palatini $f(R)$ gravity”. *Classical and Quantum Gravity* **25**:062001, {arXiv:gr-qc/0703132}. [pg: 64]
- Barausse, E., Sotiriou, T. P., & Miller, J. C. (2008b). “Curvature singularities, tidal forces and the viability of Palatini $f(R)$ gravity”. *Classical and Quantum Gravity* **25**:105008, {arXiv:0712.1141 [gr-qc]}. [pg: 64]
- Barboza Jr., E. M. (2010). *Sobre a expansão acelerada do Universo e a natureza da energia escura*. Tese de doutorado, Observatório Nacional, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. {http://www.on.br/conteudo/dppg_e_iniciacao/dppg/ferramenta_teses/teses/ASTRONOMIA/[264_13-56_C]docthesisvf.pdf}. [pg: 37]
- Barrow, J. D. & Cotsakis, S. (1988). “Inflation and the conformal structure of higher order gravity theories”. *Physics Letters B* **214**:515. [pg: 49, 58]
- Bean, R. & Magueijo, J. (2001). “Dilaton derived quintessence scenario leading naturally to the late time acceleration of the universe”. *Physics Letters B* **517**:177, {arXiv:astro-ph/0007199}. [pg: 58]
- Bento, M. C., Bertolami, O., & Sen, A. A. (2002). “Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy matter unification”. *Physical Review D* **66**:043507, {arXiv:gr-qc/0202064}.

- [pg: 39]
- Bertotti, B., Iess, L., & Tortora, P. (2003). “A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft”. *Nature* **425**:374. [pg: 43]
- Beutler, F., Blake, C., Colless, M., Jones, D. H., Staveley-Smith, L., et al. (2011). “The 6dF Galaxy Survey: Baryon Acoustic Oscillations and the local Hubble Constant”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **416**:3017, {arXiv:1106.3366 [astro-ph.CO]}. [pg: 106]
- Bilic, N., Tupper, G. B., & Viollier, R. D. (2002). “Unification of dark matter and dark energy: The inhomogeneous Chaplygin gas”. *Physics Letters B* **535**:17, {arXiv:astro-ph/0111325}. [pg: 39]
- Birrell, N. D. & Davies, P. C. W. (1982). *Quantum fields in curved space*. Cambridge University Press, {ADS:1982qfcs.book.....B}. [pg: 45]
- Blake, C., Davis, T., Poole, G., Parkinson, D., Brough, S., et al. (2011a). “The WiggleZ Dark Energy Survey: testing the cosmological model with baryon acoustic oscillations at $z = 0.6$ ”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **415**:2892, {arXiv:1105.2862 [astro-ph.CO]}. [pg: 84, 91]
- Blake, C., Kazin, E., Beutler, F., Davis, T., Parkinson, D., et al. (2011b). “The WiggleZ Dark Energy Survey: Mapping the distance-redshift relation with baryon acoustic oscillations”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **418**:1707, {arXiv:1108.2635 [astro-ph.CO]}. [pg: 84, 106]
- Borges, H. A. & Carneiro, S. (2005). “Friedmann cosmology with decaying vacuum density”. *General Relativity and Gravitation* **37**:1385, {arXiv:gr-qc/0503037}. [pg: 36]
- Borges, H. A., Carneiro, S., Fabris, J. C., & Pigozzo, C. (2008). “Evolution of density perturbations in decaying vacuum cosmology”. *Physical Review D* **77**:043513, {arXiv:0711.2689 [astro-ph]}. [pg: 36]
- Brans, C. & Dicke, R. H. (1961). “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation”. *Physical Review* **124**:925. [pg: 41]
- Brax, P., van de Bruck, C., Davis, A.-C., & Shaw, D. J. (2008). “ $f(R)$ gravity and chameleon theories”. *Physical Review D* **78**:104021, {arXiv:0806.3415 [astro-ph]}. [pg: 42]
- Buchbinder, I. L., Odintsov, S. D., & Shapiro, I. L. (1992). *Effective action in quantum gravity*. Institute of Physics, Bristol, RU, {ADS:1992eaqg.book.....B}. [pg: 45]
- Buchdahl, H. A. (1970). “Non-linear Lagrangians and cosmological theory”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **150**:1, {ADS:1970MNRAS.150....1B}. [pg: 4, 46]
- Buchert, T. (2008). “Dark Energy from structure: A status report”. *General Relativity and Gravitation* **40**:467, {arXiv:0707.2153 [gr-qc]}. [pg: 43]
- Buniy, R. V. & Hsu, S. D. H. (2006). “Instabilities and the null energy condition”. *Physics Letters B* **632**:543, {arXiv:hep-th/0502203}. [pg: 32]
- Burles, S., Nollett, K. M., & Turner, M. S. (2001). “Big bang nucleosynthesis predictions for precision cosmology”. *The Astrophysical Journal* **552**:L1, {arXiv:astro-ph/0010171}. [pg: 34]
- Burton, H. & Mann, R. B. (1998a). “Palatini variational principle for an extended Einstein–Hilbert action”. *Physical Review D* **57**:4754, {arXiv:gr-qc/9711003}. [pg: 46]
- Burton, H. & Mann, R. B. (1998b). “Palatini variational principle for N-dimensional dilaton gravity”. *Classical and Quantum Gravity* **15**:1375, {arXiv:gr-qc/9710139}. [pg: 46]
- Caldwell, R. R. (2002). “A phantom menace?”. *Physics Letters B* **545**:23, {arXiv:astro-ph/9908168}. [pg: 38]
- Caldwell, R. R., Dave, R., & Steinhardt, P. J. (1998). “Cosmological imprint of an energy component with general equation of state”. *Physical Review Letters* **80**:1582, {arXiv:astro-ph/9708069}. [pg: 37]

- Caldwell, R. R. & Kamionkowski, M. (2009). “The physics of cosmic acceleration”. *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **59**:397, {arXiv:0903.0866 [astro-ph.CO]}. [pg: 38, 41, 43]
- Caldwell, R. R., Kamionkowski, M., & Weinberg, N. N. (2003). “Phantom energy and cosmic doomsday”. *Physical Review Letters* **91**:071301, {arXiv:astro-ph/0302506}. [pg: 38]
- Campista, M., Santos, B., Santos, J., & Alcaniz, J. S. (2011). “Cosmological consequences of exponential gravity in Palatini formalism”. *Physics Letters B* **699**:320, {arXiv:1012.3943 [astro-ph.CO]}. [pg: 5, 76]
- Capozziello, S. (2002). “Curvature quintessence”. *International Journal of Modern Physics D* **11**:483, {arXiv:gr-qc/0201033}. [pg: 69]
- Capozziello, S., Cardone, V. F., & Francaviglia, M. (2006a). “ $f(R)$ theories of gravity in Palatini approach matched with observations”. *General Relativity and Gravitation* **38**:711, {arXiv:astro-ph/0410135}. [pg: 62, 91, 94, 96, 98]
- Capozziello, S., Cardone, V. F., & Salzano, V. (2008). “Cosmography of $f(R)$ gravity”. *Physical Review D* **78**:063504, {arXiv:0802.1583 [astro-ph]}. [pg: 98]
- Capozziello, S., Carloni, S., & Troisi, A. (2003). “Quintessence without scalar fields”. *Recent Research Developments in Astronomy & Astrophysics* **1**:625, {arXiv:astro-ph/0303041}. [pg: 4]
- Capozziello, S., Cianci, R., Stornaiolo, C., & Vignolo, S. (2007). “ $f(R)$ gravity with torsion: The Metric-affine approach”. *Classical and Quantum Gravity* **24**:6417, {arXiv:0708.3038 [gr-qc]}. [pg: 57]
- Capozziello, S. & De Laurentis, M. (2011). “Extended theories of gravity”. *Physics Reports* **509**:167, {arXiv:1108.6266 [gr-qc]}. [pg: 43]
- Capozziello, S. & Faraoni, V. (2011). *Beyond Einstein gravity: A survey of gravitational theories for cosmology and astrophysics*. Fundamental Theories of Physics, Vol. 170. Springer, São Francisco, CA, EUA. [pg: 46]
- Capozziello, S. & Francaviglia, M. (2008). “Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications”. *General Relativity and Gravitation* **40**:357, {arXiv:0706.1146 [astro-ph]}. [pg: 4, 12, 46]
- Capozziello, S., Nojiri, S., Odintsov, S. D., & Troisi, A. (2006b). “Cosmological viability of $f(R)$ -gravity as an ideal fluid and its compatibility with a matter dominated phase”. *Physics Letters B* **639**:135, {arXiv:astro-ph/0604431}. [pg: 5, 75, 89]
- Capozziello, S. & Tsujikawa, S. (2008). “Solar System and equivalence principle constraints on $f(R)$ gravity by chameleon approach”. *Physical Review D* **77**:107501, {arXiv:0712.2268 [gr-qc]}. [pg: 42]
- Capozziello, S. & Vignolo, S. (2009a). “A comment on ‘The Cauchy problem of $f(R)$ -gravity’”. *Classical and Quantum Gravity* **26**:168001, {arXiv:0903.3368 [gr-qc]}. [pg: 64]
- Capozziello, S. & Vignolo, S. (2009b). “The Cauchy problem for metric-affine $f(R)$ -gravity in presence of perfect-fluid matter”. *Classical and Quantum Gravity* **26**:175013, {arXiv:0904.3686 [gr-qc]}. [pg: 64]
- Carloni, S., Dunsby, P. K. S., & Troisi, A. (2008). “The evolution of density perturbations in $f(R)$ gravity”. *Physical Review D* **77**:024024, {arXiv:0707.0106 [gr-qc]}. [pg: 61]
- Carroll, S. M. (2001). “The cosmological constant”. *Living Reviews in Relativity* **4**:1, {arXiv:astro-ph/0004075}. [pg: 36]
- Carroll, S. M. (2004). *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. Addison Wesley, São Francisco, CA, EUA, {ADS:2004sgig.book.....C}. [pg: 10, 32, 40]
- Carroll, S. M., Duvvuri, V., Trodden, M., & Turner, M. S. (2004). “Is cosmic speed-up due to new gravitational physics?”. *Physical Review D* **70**:043528, {arXiv:astro-ph/0306438}. [pg: 4, 89]
- Carroll, S. M., Hoffman, M., & Trodden, M. (2003). “Can the dark energy equation-of-state parameter w

- be less than -1 ?”. *Physical Review D* **68**:023509, {arXiv:astro-ph/0301273}. [pg: 25, 38]
- Carroll, S. M. & Kaplinghat, M. (2002). “Testing the Friedmann equation: The expansion of the universe during big bang nucleosynthesis”. *Physical Review D* **65**:063507, {arXiv:astro-ph/0108002}. [pg: 34]
- Carroll, S. M., Sawicki, I., Silvestri, A., & Trodden, M. (2006). “Modified-source gravity and cosmological structure formation”. *New Journal of Physics* **8**:323, {arXiv:astro-ph/0607458}. [pg: 99]
- Carvalho, F. C., Alcaniz, J. S., Lima, J. A. S., & Silva, R. (2006). “Scalar-field-dominated cosmology with a transient accelerating phase”. *Physical Review Letters* **97**:081301, {arXiv:astro-ph/0608439}. [pg: 75]
- Carvalho, F. C., Santos, E. M., Alcaniz, J. S., & Santos, J. (2008). “Cosmological constraints from Hubble parameter on $f(R)$ cosmologies”. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **0809**:008, {arXiv:0804.2878 [astro-ph]}. [pg: 5, 62, 91, 92, 94]
- Celerier, M.-N. (2000). “Do we really see a cosmological constant in the supernovae data?”. *Astronomy and Astrophysics* **353**:63, {arXiv:astro-ph/9907206}. [pg: 43]
- Celerier, M.-N. (2007). “The accelerated expansion of the Universe challenged by an effect of the inhomogeneities. A review”. *New Advances in Physics* **1**:29, {arXiv:astro-ph/0702416}. [pg: 43]
- Chaboyer, B. (1998). “The age of the Universe”. *Physics Reports* **307**:23, {arXiv:astro-ph/9808200}. [pg: 3]
- Chandrasekhar, S. (1931). “The maximum mass of ideal white dwarfs”. *The Astrophysical Journal* **74**:81, {ADS:1931ApJ...74...81C}. [pg: 102]
- Chiba, T. (2003). “ $1/R$ gravity and scalar-tensor gravity”. *Physics Letters B* **575**:1, {arXiv:astro-ph/0307338}. [pg: 42, 60, 90]
- Chiba, T., Sugiyama, N., & Nakamura, T. (1997). “Cosmology with x matter”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **289**:L5, {arXiv:astro-ph/9704199}. [pg: 38]
- Clifton, T., Ferreira, P. G., Padilla, A., & Skordis, C. (2012). “Modified gravity and cosmology”. *Physics Reports* **513**:1, {arXiv:1106.2476 [astro-ph.CO]}. [pg: 46]
- Cline, J. M. (2001). “Quintessence, cosmological horizons, and selftuning”. *Journal of High Energy Physics* **0108**:035, {arXiv:hep-ph/0105251}. [pg: 74]
- Cognola, G., Elizalde, E., Nojiri, S., Odintsov, S. D., Sebastiani, L., & Zerbini, S. (2008). “A class of viable modified $f(R)$ gravities describing inflation and the onset of accelerated expansion”. *Physical Review D* **77**:046009, {arXiv:0712.4017 [hep-th]}. [pg: 4, 69]
- Copeland, E. J., Sami, M., & Tsujikawa, S. (2006). “Dynamics of dark energy”. *International Journal of Modern Physics D* **15**:1753, {arXiv:hep-th/0603057}. [pg: 33]
- Copi, C. J., Schramm, D. N., & Turner, M. S. (1995). “Assessing big bang nucleosynthesis”. *Physical Review Letters* **75**:3981, {arXiv:astro-ph/9508029}. [pg: 16]
- Costa, F. E. M. (2007). *Descrição de campo escalar em cosmologias com decaimento do vácuo*. Dissertação de mestrado, Observatório Nacional, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. {[http://www.on.br/conteudo/dppg_e_iniciacao/dppg/ferramenta_teses/teses/ASTRONOMIA/\[278_52-36_C\]tese.pdf](http://www.on.br/conteudo/dppg_e_iniciacao/dppg/ferramenta_teses/teses/ASTRONOMIA/[278_52-36_C]tese.pdf)}. [pg: 36]
- Costa, F. E. M. (2010). “Coupled quintessence with a possible transient accelerating phase”. *Physical Review D* **82**:103527, {arXiv:1009.3841 [astro-ph.CO]}. [pg: 75]
- Costa, F. E. M. & Alcaniz, J. S. (2010). “Cosmological consequences of a possible Λ -dark matter interaction”. *Physical Review D* **81**:043506, {arXiv:0908.4251 [astro-ph.CO]}. [pg: 75]
- Cunha, J. V. (2009). “Kinematic constraints to the transition redshift from SNe Ia Union data”. *Physical Review D* **79**:047301, {arXiv:0811.2379 [astro-ph]}. [pg: 43]

- David, L. P., Jones, C., & Forman, W. (1995). “Cosmological implications of ROSAT observations of groups and clusters of galaxies”. *The Astrophysical Journal* **445**:578. [pg: 91]
- de Bernardis, P. et al. (2000), [Boomerang Collaboration]. “A flat universe from high resolution maps of the cosmic microwave background radiation”. *Nature* **404**:955, {arXiv:astro-ph/0004404}. [pg: 3, 17, 26]
- De Felice, A., Hindmarsh, M., & Trodden, M. (2006). “Ghosts, instabilities, and superluminal propagation in modified gravity models”. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **0608**:005, {arXiv:astro-ph/0604154}. [pg: 60]
- De Felice, A. & Tsujikawa, S. (2010a). “ $f(R)$ theories”. *Living Reviews in Relativity* **13**:3, {arXiv:1002.4928 [gr-qc]}. [pg: 4, 64]
- De Felice, A. & Tsujikawa, S. (2010b). “Generalized Brans–Dicke theories”. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **1007**:024, {arXiv:1005.0868 [astro-ph.CO]}. [pg: 42]
- Deffayet, C., Landau, S. J., Raux, J., Zaldarriaga, M., & Astier, P. (2002). “Supernovae, CMB, and gravitational leakage into extra dimensions”. *Physical Review D* **66**:024019, {arXiv:astro-ph/0201164}. [pg: 39]
- Di Pietro, E. & Claeskens, J.-F. (2003). “Future supernovae data and quintessence models”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **341**:1299, {arXiv:astro-ph/0207332}. [pg: 109]
- Dicke, R. H., Peebles, P. J. E., Roll, P. G., & Wilkinson, D. T. (1965). “Cosmic black-body radiation”. *The Astrophysical Journal* **142**:414, {ADS:1965ApJ...142..414D}. [pg: 17]
- Dominguez, A. E. & Barraco, D. E. (2004). “Newtonian limit of the singular $f(R)$ gravity in the Palatini formalism”. *Physical Review D* **70**:043505, {arXiv:gr-qc/0408069}. [pg: 64]
- Dunlop, J., Peacock, J., Spinrad, H., Dey, A., Jimenez, R., et al. (1996). “A 3.5-Gyr-old galaxy at redshift 1.55”. *Nature* **381**:581. [pg: 103]
- Dvali, G. R., Gabadadze, G., & Porrati, M. (2000). “4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space”. *Physics Letters B* **485**:208, {arXiv:hep-th/0005016}. [pg: 39, 40]
- Eddington, A. S. (1923). *The mathematical theory of relativity*. Cambridge University Press, {ADS:1923mtr...book.....E}. [pg: 4, 45]
- Efstathiou, G. (1999). “Constraining the equation of state of the Universe from distant type Ia supernovae and cosmic microwave background anisotropies”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **310**:842, {arXiv:astro-ph/9904356}. [pg: 38]
- Einstein, A. (1917). “Cosmological considerations in the General Theory of Relativity”. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* **1917**:142. [pg: 3]
- Eisenhart, L. P. (1997). *Riemannian geometry*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics Series. Princeton University Press, Nova Jersey, NY, EUA. [pg: 10]
- Eisenstein, D. J. (2005). “Dark energy and cosmic sound”. *New Astronomy Reviews* **49**:360, {ADS:2005NewAR...49..360E}. [pg: 105]
- Eisenstein, D. J. et al. (2005), [SDSS Collaboration]. “Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies”. *The Astrophysical Journal* **633**:560, {arXiv:astro-ph/0501171}. [pg: 3, 34, 105]
- Eisenstein, D. J. & Hu, W. (1998). “Baryonic features in the matter transfer function”. *The Astrophysical Journal* **496**:605, {arXiv:astro-ph/9709112}. [pg: 105]
- Etherington, I. M. H. (2007). “Republication of: LX. On the definition of distance in general relativity”. *General Relativity and Gravitation* **39**:1055, {ADS:2007GRGr...39.1055E}. [pg: 25]
- Ettori, S., Morandi, A., Tozzi, P., Balestra, I., Borgani, S., et al. (2009). “The cluster gas mass fraction as a cosmological probe: A revised study”. *Astronomy and Astrophysics* **501**:61, {arXiv:0904.2740 [astro-ph.CO]}. [pg: 3, 84, 91, 93, 103, 104]
- Ettori, S., Tozzi, P., & Rosati, P. (2003). “Constraining the cosmological parameters with the gas

- mass fraction in local and $z > 0.7$ galaxy clusters”. *Astronomy and Astrophysics* **398**:879, {arXiv:astro-ph/0211335}. [pg: 91]
- Exirifard, Q. & Sheikh-Jabbari, M. M. (2008). “Lovelock gravity at the crossroads of Palatini and metric formulations”. *Physics Letters B* **661**:158, {arXiv:0705.1879 [hep-th]}. [pg: 46]
- Faraoni, V. (2006). “Matter instability in modified gravity”. *Physical Review D* **74**:104017, {arXiv:astro-ph/0610734}. [pg: 63]
- Faraoni, V. & Nadeau, S. (2007). “(Pseudo)issue of the conformal frame revisited”. *Physical Review D* **75**:023501, {arXiv:gr-qc/0612075}. [pg: 58]
- Faulkner, T., Tegmark, M., Bunn, E. F., & Mao, Y. (2007). “Constraining $f(R)$ gravity as a scalar tensor theory”. *Physical Review D* **76**:063505, {arXiv:astro-ph/0612569}. [pg: 42]
- Fay, S., Tavakol, R., & Tsujikawa, S. (2007). “ $f(R)$ gravity theories in Palatini formalism: Cosmological dynamics and observational constraints”. *Physical Review D* **75**:063509, {arXiv:astro-ph/0701479}. [pg: 5, 62, 90, 92, 94]
- Ferraris, M., Francaviglia, M., & Reina, C. (1982). “Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 ‘Palatini’s method’ discovered by Einstein in 1925”. *General Relativity and Gravitation* **14**:243, {ADS:1982GReGr...14...243F}. [pg: 51]
- Ferraris, M., Francaviglia, M., & Volovich, I. (1994). “The universality of vacuum Einstein equations with cosmological constant”. *Classical and Quantum Gravity* **11**:1505, {arXiv:gr-qc/9303007}. [pg: 54]
- Ferraro, S., Schmidt, F., & Hu, W. (2011). “Cluster Abundance in $f(R)$ Gravity Models”. *Physical Review D* **83**:063503, {arXiv:1011.0992 [astro-ph.CO]}. [pg: 78]
- Fischler, W., Kashani-Poor, A., McNeese, R., & Paban, S. (2001). “The acceleration of the universe, a challenge for string theory”. *Journal of High Energy Physics* **0107**:003, {arXiv:hep-th/0104181}. [pg: 6, 74, 98]
- Fixsen, D. J., Cheng, E. S., Gales, J. M., Mather, J. C., Shafer, R. A., et al. (1996). “The Cosmic Microwave Background spectrum from the full COBE FIRAS data set”. *The Astrophysical Journal* **473**:576, {arXiv:astro-ph/9605054}. [pg: 17]
- Flanagan, E. E. (2004a). “Palatini form of $1/R$ gravity”. *Physical Review Letters* **92**:071101, {arXiv:astro-ph/0308111}. [pg: 49, 55, 63]
- Flanagan, E. E. (2004b). “The conformal frame freedom in theories of gravitation”. *Classical and Quantum Gravity* **21**:3817, {arXiv:gr-qc/0403063}. [pg: 49, 58, 63]
- Freedman, W. L. et al. (2001), [HST Collaboration]. “Final results from the Hubble Space Telescope key project to measure the Hubble constant”. *The Astrophysical Journal* **553**:47, {arXiv:astro-ph/0012376}. [pg: 15, 16, 72]
- Fujii, Y. & Maeda, K.-I. (2003). *The scalar-tensor theory of gravitation*. Cambridge University Press, Cambridge, RU, {ADS:2003sttg.book.....F}. [pg: 40]
- Gamow, G. (1948). “The evolution of the Universe”. *Nature* **162**:680, {ADS:1948Natur.162...680G}. [pg: 17]
- Gil-Marín, H., Schmidt, F., Hu, W., Jimenez, R., & Verde, L. (2011). “The ispectrum of $f(R)$ Cosmologies”. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **1111**:019, {arXiv:1109.2115 [astro-ph.CO]}. [pg: 78]
- Gonzalez-Diaz, P. F. (2003). “You need not be afraid of phantom energy”. *Physical Review D* **68**:021303, {arXiv:astro-ph/0305559}. [pg: 38]
- Gregory, P. C. (2005). *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences: A Comparative Approach with ‘Mathematica’ Support*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, {ADS:2005bllda.book.....G}. [pg: 109]
- Guimaraes, A. C. C., Cunha, J. V., & Lima, J. A. S. (2009). “Bayesian analysis and constraints on

- kinematic models from Union SNIa”. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **0910**:010, {arXiv:0904.3550 [astro-ph.CO]}. [pg: 43]
- Gurovich, V. T. & Starobinsky, A. A. (1979). “Quantum effects and regular cosmological models”. *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki* **77**:1683. [pg: 60]
- Guth, A. H. (1981). “The inflationary universe: A possible solution to the Horizon and Flatness Problems”. *Physical Review D* **23**:347. [pg: 33]
- Halyo, E. (2001). “Hybrid quintessence with an end or quintessence from branes and large dimensions”. *Journal of High Energy Physics* **0110**:025, {arXiv:hep-ph/0105216}. [pg: 75]
- Hawking, S. W. & Ellis, G. F. R. (1973). *The large-scale structure of space-time*. Cambridge University Press, Cambridge, RU, {ADS:1973lsss.book.....H}. [pg: 25, 31, 32]
- Hehl, F. W. & Kerlick, G. D. (1978). “Metric-affine variational principles in general relativity. I - Riemannian space-time”. *General Relativity and Gravitation* **9**:691, {ADS:1978GReGr...9...691H}. [pg: 57, 58]
- Hellerman, S., Kaloper, N., & Susskind, L. (2001). “String theory and quintessence”. *Journal of High Energy Physics* **0106**:003, {arXiv:hep-th/0104180}. [pg: 74]
- Hogg, D. W. (1999). “Distance measures in cosmology”. {arXiv:astro-ph/9905116}. [pg: 25]
- Hu, W. & Sawicki, I. (2007). “Models of $f(R)$ cosmic acceleration that evade Solar-System tests”. *Physical Review D* **76**:064004, {arXiv:0705.1158 [astro-ph]}. [pg: 4, 5, 42, 60, 61, 69, 77, 78, 87, 98]
- Hu, W. & Sugiyama, N. (1996). “Small scale cosmological perturbations: An analytic approach”. *The Astrophysical Journal* **471**:542, {arXiv:astro-ph/9510117}. [pg: 105]
- Hubble, E. (1929). “A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae”. *Proceedings of the National Academy of Science* **15**:168, {ADS:1912LowOB...2...26S}. [pg: 14]
- Hwang, J.-c. & Noh, H.-r. (2002). “Gauge ready formulation of the cosmological kinetic theory in generalized gravity theories”. *Physical Review D* **65**:023512, {arXiv:astro-ph/0102005}. [pg: 99]
- Ishak, M., Richardson, J., Whittington, D., & Garred, D. (2008). “Dark Energy or apparent acceleration due to a relativistic cosmological model more complex than FLRW?”. *Physical Review D* **78**:123531, {arXiv:0708.2943 [astro-ph]}. [pg: 43]
- Jain, D., Dev, A., & Alcaniz, J. S. (2002). “Brane world cosmologies and statistical properties of gravitational lenses”. *Physical Review D* **66**:083511, {arXiv:astro-ph/0206224}. [pg: 39]
- Jarosik, N., Bennett, C. L., Dunkley, J., Gold, B., Greason, M. R., et al. (2011). “Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results”. *The Astrophysical Journal, Supplement Series* **192**:14, {arXiv:1001.4744 [astro-ph.CO]}. [pg: 106]
- Jimenez, R. (1996). “The age of the Universe”. {arXiv:astro-ph/9701222}. [pg: 3]
- Jimenez, R. & Loeb, A. (2002). “Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages”. *The Astrophysical Journal* **573**:37, {arXiv:astro-ph/0106145}. [pg: 103]
- Kainulainen, K., Piilonen, J., Reijonen, V., & Sunhede, D. (2007). “Spherically symmetric spacetimes in $f(R)$ gravity theories”. *Physical Review D* **76**:024020, {arXiv:0704.2729 [gr-qc]}. [pg: 64]
- Kamenshchik, A. Y., Moschella, U., & Pasquier, V. (2001). “An alternative to quintessence”. *Physics Letters B* **511**:265, {arXiv:gr-qc/0103004}. [pg: 39]
- Khoury, J. & Weltman, A. (2004a). “Chameleon cosmology”. *Physical Review D* **69**:044026, {arXiv:astro-ph/0309411}. [pg: 42, 60, 61]
- Khoury, J. & Weltman, A. (2004b). “Chameleon fields: Awaiting surprises for tests of gravity in space”. *Physical Review Letters* **93**:171104, {arXiv:astro-ph/0309300}. [pg: 42, 60]
- Knox, L., Song, Y.-S., & Tyson, J. A. (2006). “Distance-redshift and growth-redshift relations as

- two windows on acceleration and gravitation: Dark energy or new gravity?”. *Physical Review D* **74**:023512, {arXiv:astro-ph/0503644}. [pg: 61]
- Kobayashi, T., Tashiro, H., & Suzuki, D. (2010). “Evolution of linear cosmological perturbations and its observational implications in Galileon-type modified gravity”. *Physical Review D* **81**:063513, {arXiv:0912.4641 [astro-ph.CO]}. [pg: 42]
- Koivisto, T. & Kurki-Suonio, H. (2006). “Cosmological perturbations in the palatini formulation of modified gravity”. *Classical and Quantum Gravity* **23**:2355, {arXiv:astro-ph/0509422}. [pg: 61, 62, 99]
- Kolb, E. W. & Turner, M. S. (1990). *The early universe*, vol. 69 de *Frontiers in Physics*. Addison Wesley, Redwood City, EUA. [pg: 33, 34]
- Komatsu, E. et al. (2011), [*WMAP Collaboration*]. “Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Cosmological interpretation”. *The Astrophysical Journal, Supplement Series* **192**:18, {arXiv:1001.4538 [astro-ph.CO]}. [pg: 3, 19, 95, 105, 106]
- Kowalski, M. et al. (2008), [*Supernova Cosmology Project*]. “Improved cosmological constraints from New, Old and Combined supernova datasets”. *The Astrophysical Journal* **686**:749, {arXiv:0804.4142 [astro-ph]}. [pg: 102]
- Koyama, K. & Maartens, R. (2006). “Structure formation in the Dvali–Gabadadze–Porrati cosmological model”. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **0601**:016, {arXiv:astro-ph/0511634}. [pg: 61]
- Krauss, L. M. & Turner, M. S. (1995). “The cosmological constant is back”. *General Relativity and Gravitation* **27**:1137, {arXiv:astro-ph/9504003}. [pg: 3]
- Lagana, T. F., Neto, G. B. L., Andrade-Santos, F., & Cypriano, E. S. (2008). “Star formation efficiency in galaxy clusters”. {arXiv:0804.1102 [astro-ph]}. [pg: 103]
- Lanahan-Tremblay, N. & Faraoni, V. (2007). “The Cauchy problem of $f(R)$ gravity”. *Classical and Quantum Gravity* **24**:5667, {arXiv:0709.4414 [gr-qc]}. [pg: 64]
- Lemaitre, G. (1997). “The expanding universe”. *General Relativity and Gravitation* **29**:641. [pg: 43]
- Li, B. & Barrow, J. D. (2007). “The cosmology of $f(R)$ gravity in metric variational approach”. *Physical Review D* **75**:084010, {arXiv:gr-qc/0701111}. [pg: 42, 61, 69]
- Li, B. & Chu, M. C. (2006). “CMB and matter power spectra of early $f(R)$ cosmology in Palatini formalism”. *Physical Review D* **74**:104010, {arXiv:astro-ph/0610486}. [pg: 61, 62, 64]
- Li, M., Cai, Y., Li, H., Brandenberger, R., & Zhang, X. (2011). “Dark energy perturbations revisited”. *Physics Letters B* **702**:5, {arXiv:1008.1684 [astro-ph.CO]}. [pg: 78]
- Lima, J. A. S. (2004). “Alternative dark energy models: An overview”. *Brazilian Journal of Physics* **34**:194, {arXiv:astro-ph/0402109}. [pg: 33]
- Lima, J. A. S. & Alcaniz, J. S. (2000). “Angular size in “quintessence” cosmology”. *Astronomy and Astrophysics* **357**:393, {arXiv:astro-ph/0003189}. [pg: 25]
- Lima, J. A. S., Cunha, J. V., & Alcaniz, J. S. (2003). “Constraining the dark energy with galaxy clusters X-ray data”. *Physical Review D* **68**:023510, {arXiv:astro-ph/0303388}. [pg: 84, 91]
- Lima, J. A. S., Cunha, J. V., & Alcaniz, J. S. (2008). “A simplified approach for Chaplygin-type cosmologies”. *Astroparticle Physics* **30**:196, {arXiv:astro-ph/0608469}. [pg: 39]
- Lima, J. A. S., Cunha, J. V., & Alcaniz, J. S. (2009). “Simplified Quintessence Cosmology”. *Astroparticle Physics* **31**:233, {arXiv:astro-ph/0611007}. [pg: 39]
- Linde, A. D. (1990). *Particle physics and inflationary cosmology*, vol. 5 de *Contemporary Concepts in Physics*. Harwood Academic Publishers, Switzerland, {arXiv:hep-th/0503203}. [pg: 33, 34]
- Linder, E. V. (2009). “Exponential gravity”. *Physical Review D* **80**:123528, {arXiv:0905.2962 [astro-ph.CO]}. [pg: 42, 69, 70]
- Lombriser, L., Slosar, A., Seljak, U., & Hu, W. (2012). “Constraints on $f(R)$ gravity from probing the

- large-scale structure”. *Physical Review D* **85**:124038, {arXiv:1003.3009 [astro-ph.CO]}. [pg: 78]
- Lue, A. (2006). “The phenomenology of Dvali-Gabadadze-Porrati cosmologies”. *Physics Reports* **423**:1, {arXiv:astro-ph/0510068}. [pg: 39]
- Lue, A., Scoccimarro, R., & Starkman, G. (2004). “Differentiating between modified gravity and dark energy”. *Physical Review D* **69**:044005, {arXiv:astro-ph/0307034}. [pg: 99]
- Maartens, R. (2004). “Brane world gravity”. *Living Reviews in Relativity* **7**:7, {arXiv:gr-qc/0312059}. [pg: 4]
- Maeda, K.-i. (1989). “Towards the Einstein–Hilbert action via conformal transformation”. *Physical Review D* **39**:3159. [pg: 49, 59]
- Magnano, G. & Sokolowski, L. M. (1994). “Physical equivalence between nonlinear gravity theories and a general-relativistic self-gravitating scalar field”. *Physical Review D* **50**:5039, {arXiv:gr-qc/9312008}. [pg: 49, 59]
- Maia, M. D., Monte, E. M., Maia, J. M. F., & Alcaniz, J. S. (2005). “On the geometry of dark energy”. *Classical and Quantum Gravity* **22**:1623, {arXiv:astro-ph/0403072}. [pg: 39]
- Martinelli, M. (2009). “Cosmological constraints on the Hu-Sawicki modified gravity scenario”. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **194**:266–271. [pg: 78]
- Martinelli, M., Melchiorri, A., & Amendola, L. (2009). “Cosmological constraints on the Hu-Sawicki modified gravity scenario”. *Physical Review D* **79**:123516, {arXiv:0906.2350 [astro-ph.CO]}. [pg: 78]
- Martinelli, M., Melchiorri, A., Mena, O., Salvatelli, V., & Girones, Z. (2012). “Future constraints on the Hu-Sawicki modified gravity scenario”. *Physical Review D* **85**:024006, {arXiv:1109.4736 [astro-ph.CO]}. [pg: 84]
- Mather, J. C., Fixsen, D. J., Shafer, R. A., Mosier, C., & Wilkinson, D. T. (1999). “Calibrator design for the COBE far infrared absolute spectrophotometer (FIRAS)”. *The Astrophysical Journal* **512**:511, {arXiv:astro-ph/9810373}. [pg: 17]
- McCarthy, P. J., Le Borgne, D., Crampton, D., Chen, H.-W., Abraham, R. G., et al. (2004). “Evolved galaxies at $z > 1.5$ from the Gemini Deep Deep Survey: The formation epoch of massive stellar systems”. *The Astrophysical Journal* **614**:L9, {arXiv:astro-ph/0408367}. [pg: 103]
- Meng, X. & Wang, P. (2003). “Modified Friedmann equations in R^{-1} -modified gravity”. *Classical and Quantum Gravity* **20**:4949, {arXiv:astro-ph/0307354}. [pg: 89]
- Meng, X.-H. & Wang, P. (2004a). “Gravitational potential in Palatini formulation of modified gravity”. *General Relativity and Gravitation* **36**:1947, {arXiv:gr-qc/0311019}. [pg: 64]
- Meng, X.-H. & Wang, P. (2004b). “Palatini formation of modified gravity with $\ln R$ terms”. *Physics Letters B* **584**:1, {arXiv:hep-th/0309062}. [pg: 62]
- Meng, X.-H. & Wang, P. (2004c). “Palatini formulation of modified gravity with squared scalar curvature”. *General Relativity and Gravitation* **36**:2673, {arXiv:astro-ph/0308284}. [pg: 57]
- Meng, X.-H. & Wang, P. (2004d). “ R^2 corrections to the cosmological dynamics of inflation in the Palatini formulation”. *Classical and Quantum Gravity* **21**:2029, {arXiv:gr-qc/0402011}. [pg: 57]
- Meng, X.-H. & Wang, P. (2005). “Palatini formulation of the R^{-1} modified gravity with an additionally squared scalar curvature term”. *Classical and Quantum Gravity* **22**:23–32, {arXiv:gr-qc/0411007}. [pg: 57]
- Minkowski, H. (1907). “Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern”. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Mathematisch-Physikalische Klasse*:53. {http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PPN=GDZPPN00250152X}. [pg: 20]

- Misner, C. W. (1968). “The isotropy of the universe”. *The Astrophysical Journal* **151**:431. [pg: 34]
- Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman and Co., São Francisco, CA, EUA, {ADS:1973grav.book.....M}. [pg: 46]
- Mukhanov, V. F. (2003). “CMB, quantum fluctuations and the predictive power of inflation”. {arXiv:astro-ph/0303077}. [pg: 34]
- Nariai, H. (1973). “Gravitational instability of regular model-universes in a modified theory of general relativity”. *Progress of Theoretical Physics* **49**:165. [pg: 60]
- Navarro, I. & Van Acoleyen, K. (2007). “ $f(R)$ actions, cosmic acceleration and local tests of gravity”. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **0702**:022, {arXiv:gr-qc/0611127}. [pg: 42]
- Neto, G. B. L. (2012). *Astronomia extragaláctica: notas de aula*. São Paulo, SP, Brasil. {http://www.astro.iag.usp.br/~gastao}. [pg: 18, 20]
- Nojiri, S. & Odintsov, S. D. (2004). “Modified gravity with $\ln R$ terms and cosmic acceleration”. *General Relativity and Gravitation* **36**:1765, {arXiv:hep-th/0308176}. [pg: 62]
- Nojiri, S. & Odintsov, S. D. (2006). “Modified $f(R)$ gravity consistent with realistic cosmology: From matter dominated epoch to dark energy universe”. *Physical Review D* **74**:086005, {arXiv:hep-th/0608008}. [pg: 5]
- Nojiri, S. & Odintsov, S. D. (2007a). “Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy”. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* **4**:115, {arXiv:hep-th/0601213}. [pg: 4]
- Nojiri, S. & Odintsov, S. D. (2007b). “Unifying inflation with Λ CDM epoch in modified $f(R)$ gravity consistent with Solar System tests”. *Physics Letters B* **657**:238, {arXiv:0707.1941 [hep-th]}. [pg: 5]
- Nolan, L. A., Dunlop, J. S., & Jimenez, R. (2001). “The sun, stellar-population models, and the age estimation of high-redshift galaxies”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **323**:385, {arXiv:astro-ph/0004325}. [pg: 103]
- Nunez, A. & Solganik, S. (2004). “The content of $f(R)$ gravity”. {arXiv:hep-th/0403159}. [pg: 60]
- O’ Hanlon, J. (1972). “Intermediate-range gravity – a generally covariant model”. *Physical Review Letters* **29**:137. [pg: 42]
- Oliveira, T. B. R. d. F. (2010). *Teorias $f(R)$ de gravidade na formulação de Palatini*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil. {http://bdtd.bczm.ufrn.br/tesdesimplificado/tde_arquivos/11/TDE-2010-12-28T000505Z-3198/Publico/ThiagoBRFO DISSERT.pdf}. [pg: 46, 55]
- Olmo, G. J. (2005). “Post-Newtonian constraints on $f(R)$ cosmologies in metric and Palatini formalism”. *Physical Review D* **72**:083505, {arXiv:gr-qc/0505136}. [pg: 49, 55, 62, 64]
- Olmo, G. J. (2007). “Limit to general relativity in $f(R)$ theories of gravity”. *Physical Review D* **75**:023511, {arXiv:gr-qc/0612047}. [pg: 49]
- Olmo, G. J. (2008). “Re-examination of polytropic spheres in Palatini $f(R)$ gravity”. *Physical Review D* **78**:104026, {arXiv:0810.3593 [gr-qc]}. [pg: 64]
- Olmo, G. J. & Komp, W. (2004). “Nonlinear gravity theories in the metric and Palatini formalisms”. {arXiv:gr-qc/0403092}. [pg: 49, 62]
- Olmo, G. J. & Sanchis-Alepuz, H. (2011). “Hamiltonian formulation of Palatini $f(R)$ theories à la Brans–Dicke”. *Physical Review D* **83**:104036, {arXiv:1101.3403 [gr-qc]}. [pg: 64]
- Oyaizu, H., Lima, M., & Hu, W. (2008). “Nonlinear evolution of $f(R)$ cosmologies. 2. Power spectrum”. *Physical Review D* **78**:123524, {arXiv:0807.2462 [astro-ph]}. [pg: 78]
- Padmanabhan, T. (2003). “Cosmological constant: The weight of the vacuum”. *Physics Reports* **380**:235, {arXiv:hep-th/0212290}. [pg: 33]
- Peebles, P. J. E. (1966). “Primordial helium abundance and the primordial fireball. 2”. *The Astrophysical*

- Journal* **146**:542. [pg: 16]
- Peebles, P. J. E. & Ratra, B. (2003). “The cosmological constant and dark energy”. *Reviews of Modern Physics* **75**:559, {arXiv:astro-ph/0207347}. [pg: 33]
- Penzias, A. A. & Wilson, R. W. (1965). “A measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s”. *The Astrophysical Journal* **142**:419, {ADS:1965ApJ...142..419P}. [pg: 17]
- Percival, W. J. et al. (2010), [SDSS Collaboration]. “Baryon Acoustic Oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 galaxy sample”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **401**:2148, {arXiv:0907.1660 [astro-ph.CO]}. [pg: 106]
- Perlmutter, S. et al. (1999), [Supernova Cosmology Project]. “Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift supernovae”. *The Astrophysical Journal* **517**:565, {arXiv:astro-ph/9812133}. [pg: 3]
- Pires, N., Santos, J., & Alcaniz, J. S. (2010). “Cosmographic constraints on a class of Palatini $f(R)$ gravity”. *Physical Review D* **82**:067302, {arXiv:1006.0264 [astro-ph.CO]}. [pg: xiii, 57, 62, 75, 85, 90, 91]
- Pogosian, L. & Silvestri, A. (2008). “Pattern of growth in viable $f(R)$ cosmologies”. *Physical Review D* **77**:023503, {arXiv:0709.0296 [astro-ph]}. [pg: 58, 60, 61]
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (1992). “Numerical recipes in FORTRAN: The art of scientific computing”. [pg: 80, 108, 109]
- Querella, L. (1998). *Variational principles and cosmological models in higher order gravity*. Tese de doutorado, Université de Liège, Liège, Bélgica, {arXiv:gr-qc/9902044}. [pg: 46]
- Randall, L. & Sundrum, R. (1999a). “A large mass hierarchy from a small extra dimension”. *Physical Review Letters* **83**:3370, {arXiv:hep-ph/9905221}. [pg: 39]
- Randall, L. & Sundrum, R. (1999b). “An alternative to compactification”. *Physical Review Letters* **83**:4690, {arXiv:hep-th/9906064}. [pg: 39]
- Ratra, B. & Peebles, P. J. E. (1988). “Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field”. *Physical Review D* **37**:3406, {ADS:1988PhRvD...37.3406R}. [pg: 37]
- Riess, A. G. et al. (1998), [Supernova Search Team]. “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant”. *Astronomical Journal* **116**:1009, {arXiv:astro-ph/9805201}. [pg: 3]
- Riess, A. G. et al. (2004), [Supernova Search Team]. “Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution”. *The Astrophysical Journal* **607**:665, {arXiv:astro-ph/0402512}. [pg: 3, 34, 43, 102]
- Riess, A. G., Macri, L., Casertano, S., Lampeitl, H., Ferguson, H. C., et al. (2011). “A 3% Solution: Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3”. *The Astrophysical Journal* **730**:119, {arXiv:1103.2976 [astro-ph.CO]}. [pg: 16, 83, 103]
- Riess, A. G., Strolger, L.-G., Casertano, S., Ferguson, H. C., Mobasher, B., et al. (2007). “New Hubble Space Telescope discoveries of type Ia supernovae at $z \geq 1$: Narrowing constraints on the early behavior of Dark Energy”. *The Astrophysical Journal* **659**:98, {arXiv:astro-ph/0611572}. [pg: 102]
- Roberts, M. S. & Rots, A. H. (1973). “Comparison of rotation curves of different galaxy types”. *Astronomy and Astrophysics* **26**:483, {ADS:1973A%26A...26..483R}. [pg: 33]
- Rubin, V. (1996). *Bright galaxies, dark matters*. {ADS:1996bgdm.book....R}. [pg: 33]
- Rubin, V. C., Thonnard, N., & Ford, Jr., W. K. (1978). “Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV - Systematic dynamical properties, SA through SC”. *The Astrophysical Journal, Letters* **225**:L107, {ADS:1978ApJ...225L.107R}. [pg: 33]
- Sadat, R., Blanchard, A., Vauclair, S. C., Lumb, D. H., Bartlett, J., et al. (2005). “XMM-Newton Ω Project III. Gas mass fraction shape in high redshift clusters”. *Astronomy and Astrophysics* **437**:31, {arXiv:astro-ph/0503426}. [pg: 91]

- Sahni, V. & Shtanov, Y. (2000). “New vistas in brane world cosmology”. *International Journal of Modern Physics D* **11**:1515, {arXiv:gr-qc/0205111}. [pg: 39, 75]
- Sahni, V. & Shtanov, Y. (2003). “Brane world models of dark energy”. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **0311**:014, {arXiv:astro-ph/0202346}. [pg: 39]
- Sahni, V. & Starobinsky, A. A. (2000). “The case for a positive cosmological Λ -term”. *International Journal of Modern Physics D* **9**:373, {arXiv:astro-ph/9904398}. [pg: 35]
- Santos, B., Campista, M., & Gonçalves, R. S. (2013). “Cosmological constraints on power-law $f(R)$ -gravity from gas mass fraction of galaxy clusters”. Em preparação. [pg: 96]
- Santos, B., Campista, M., Santos, J., & Alcaniz, J. S. (2012). “Cosmology with Hu-Sawicki gravity in Palatini formalism”. *Astronomy and Astrophysics* **548**:A31, {arXiv:1207.2478 [astro-ph.CO]}. [pg: 87]
- Santos, B., Carvalho, J. C., & Alcaniz, J. S. (2011). “Current constraints on the epoch of cosmic acceleration”. *Astroparticle Physics* **35**:17, {arXiv:1009.2733 [astro-ph.CO]}. [pg: 43]
- Santos, J., Alcaniz, J. S., Carvalho, F. C., & Pires, N. (2008). “Latest supernovae constraints on $f(R)$ cosmologies”. *Physics Letters B* **669**:14, {arXiv:0808.4152 [astro-ph]}. [pg: 5, 62, 91, 92, 94]
- Santos, R. C. & Jesus, J. F. (2008). “Simplified Chaplygin gas: Deriving H_0 from ages of old high redshift objects and baryon acoustic oscillations”. {arXiv:0806.2822 [astro-ph]}. [pg: 39]
- Sasaki, S. (1996). “A new method to estimate cosmological parameters using the baryon fraction of clusters of galaxies”. *Publications of the Astronomical Society of Japan* **48**:L119. [pg: 91, 103, 104]
- Schmidt, F., Vikhlinin, A., & Hu, W. (2009). “Cluster constraints on $f(R)$ gravity”. *Physical Review D* **80**:083505, {arXiv:0908.2457 [astro-ph.CO]}. [pg: 77]
- Schrödinger, E. (1963). *Space-time structure*. Cambridge University Press, {ADS:1963sts..book.....S}. [pg: 52]
- Shafieloo, A., Sahni, V., & Starobinsky, A. A. (2009). “Is cosmic acceleration slowing down?”. *Physical Review D* **80**:101301, {arXiv:0903.5141 [astro-ph.CO]}. [pg: 75, 95]
- Shahid-Saless, B. (1987). “First order formalism treatment of $R+R^2$ gravity”. *Physical Review D* **35**:467. [pg: 46]
- Shirata, A., Shiromizu, T., Yoshida, N., & Suto, Y. (2005). “Galaxy clustering constraints on deviations from Newtonian gravity at cosmological scales”. *Physical Review D* **71**:064030, {arXiv:astro-ph/0501366}. [pg: 61]
- Silva, F. P. & Koyama, K. (2009). “Self-accelerating Universe in Galileon cosmology”. *Physical Review D* **80**:121301, {arXiv:0909.4538 [astro-ph.CO]}. [pg: 42]
- Skordis, C., Mota, D. F., Ferreira, P. G., & Boehm, C. (2006). “Large Scale Structure in Bekenstein’s theory of relativistic Modified Newtonian Dynamics”. *Physical Review Letters* **96**:011301, {arXiv:astro-ph/0505519}. [pg: 61]
- Slipher, V. M. (1912). “On the spectrum of the nebula in the Pleiades”. *Lowell Observatory Bulletin* **2**:26, {ADS:1912LowOB...2...26S}. [pg: 14]
- Smith, S. (1936). “The mass of the Virgo cluster”. *The Astrophysical Journal* **83**:23, {ADS:1936ApJ...83...23S}. [pg: 33]
- Smoot, G. F., Bennett, C. L., Kogut, A., Wright, E. L., Aymon, J., et al. (1992). “Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps”. *The Astrophysical Journal* **396**:L1, {ADS:1992ApJ...396L...1S}. [pg: 17, 18]
- Sollerman, J., Mortsell, E., Davis, T. M., Blomqvist, M., Bassett, B., et al. (2009). “First-year Sloan Digital Sky Survey-II (SDSS-II) supernova results: Constraints on non-standard cosmological models”. *The Astrophysical Journal* **703**:1374, {arXiv:0908.4276 [astro-ph.CO]}. [pg: 40, 105]

- Song, Y.-S., Hu, W., & Sawicki, I. (2007). “Large scale structure of $f(R)$ gravity”. *Physical Review D* **75**:044004, {arXiv:astro-ph/0610532}. [pg: 61, 78, 99]
- Sotiriou, T. P. (2006a). “Constraining $f(R)$ gravity in the Palatini formalism”. *Classical and Quantum Gravity* **23**:1253, {arXiv:gr-qc/0512017}. [pg: 57, 62, 90]
- Sotiriou, T. P. (2006b). “ $f(R)$ gravity and scalar-tensor theory”. *Classical and Quantum Gravity* **23**:5117, {arXiv:gr-qc/0604028}. [pg: 49, 55, 90]
- Sotiriou, T. P. (2006c). “The Nearly Newtonian regime in non-linear theories of gravity”. *General Relativity and Gravitation* **38**:1407, {arXiv:gr-qc/0507027}. [pg: 64]
- Sotiriou, T. P. (2006d). “Unification of inflation and cosmic acceleration in the Palatini formalism”. *Physical Review D* **73**:063515, {arXiv:gr-qc/0509029}. [pg: 57, 62]
- Sotiriou, T. P. (2007). “Curvature scalar instability in $f(R)$ gravity”. *Physics Letters B* **645**:389, {arXiv:gr-qc/0611107}. [pg: 57, 62]
- Sotiriou, T. P. (2009). “6+1 lessons from $f(R)$ gravity”. *Journal of Physics: Conference Series* **189**:012039, {arXiv:0810.5594 [gr-qc]}. [pg: 63]
- Sotiriou, T. P. & Faraoni, V. (2010). “ $f(R)$ theories of gravity”. *Reviews of Modern Physics* **82**:451, {arXiv:0805.1726 [gr-qc]}. [pg: 4, 42, 46, 47, 48, 49, 51, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61]
- Sotiriou, T. P., Faraoni, V., & Liberati, S. (2008). “Theory of gravitation theories: A No-progress report”. *International Journal of Modern Physics D* **17**:399, {arXiv:0707.2748 [gr-qc]}. [pg: 58]
- Sotiriou, T. P. & Liberati, S. (2007). “Metric-affine $f(R)$ theories of gravity”. *Annals of Physics* **322**:935, {arXiv:gr-qc/0604006}. [pg: 57, 58]
- Spergel, D. N. et al. (2003), [WMAP Collaboration]. “First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters”. *The Astrophysical Journal, Supplement Series* **148**:175, {arXiv:astro-ph/0302209}. [pg: 17, 93]
- Spergel, D. N. et al. (2007), [WMAP Collaboration]. “Three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Implications for cosmology”. *The Astrophysical Journal, Supplement Series* **170**:377, {arXiv:astro-ph/0603449}. [pg: 26, 34, 93]
- Spinrad, H., Dey, A., Stern, D., Dunlop, J., Peacock, J., et al. (1997). “Lbds 53w091: an old red galaxy at $z = 1.552$ ”. *The Astrophysical Journal* **484**:581, {arXiv:astro-ph/9702233}. [pg: 3, 103]
- Stabenau, H. F. & Jain, B. (2006). “N-Body simulations of alternate gravity models”. *Physical Review D* **74**:084007, {arXiv:astro-ph/0604038}. [pg: 61]
- Starobinsky, A. A. (1980). “A new type of isotropic cosmological models without singularity”. *Physics Letters B* **91**:99. [pg: 89]
- Starobinsky, A. A. (2007). “Disappearing cosmological constant in $f(R)$ gravity”. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **86**:157, {arXiv:0706.2041 [astro-ph]}. [pg: 4, 5, 42, 69]
- Stelle, K. S. (1977). “Renormalization of higher derivative quantum gravity”. *Physical Review D* **16**:953. [pg: 45]
- Stephani, H. (1967a). “Konform flache Gravitationsfelder”. *Communications in Mathematical Physics* **5**:337. [pg: 43]
- Stephani, H. (1967b). “Über Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen, die sich in einen fünfdimensionalen flachen Raum einbetten lassen”. *Communications in Mathematical Physics* **4**:137. [pg: 43]
- Stern, D., Jimenez, R., Verde, L., Kamionkowski, M., & Stanford, S. A. (2010). “Cosmic chronometers: Constraining the equation of state of dark energy. I: $H(z)$ measurements”. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **1002**:008, {arXiv:0907.3149 [astro-ph.CO]}. [pg: 72, 73, 83, 84, 103]
- Sullivan, M., Guy, J., Conley, A., Regnault, N., Astier, P., et al. (2011). “SNLS3: Constraints on dark

- energy combining the Supernova Legacy Survey Three-year data with other probes”. *The Astrophysical Journal* **737**:102, {arXiv:1104.1444 [astro-ph.CO]}. [pg: 3]
- Suzuki, N., Rubin, D., Lidman, C., Aldering, G., Amanullah, R., et al. (2012), [*Supernova Cosmology Project*]. “The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey: V. Improving the dark energy constraints above $z > 1$ and building an early-type-hosted supernova sample”. *The Astrophysical Journal* **746**:85, {arXiv:1105.3470 [astro-ph.CO]}. [pg: 3, 83, 84, 102]
- Szekeres, P. (1975). “Quasispherical gravitational collapse”. *Physical Review D* **12**:2941. [pg: 43]
- Teyssandier, P. & Tournenc, P. (1983). “The Cauchy problem for the $R + R^2$ theories of gravity without torsion”. *Journal of Mathematical Physics* **24**:2793. [pg: 49]
- Thongkool, I., Sami, M., Gannouji, R., & Jhingan, S. (2009). “Constraining $f(R)$ gravity models with disappearing cosmological constant”. *Physical Review D* **80**:043523, {arXiv:0906.2460 [hep-th]}. [pg: 42]
- Tolman, R. C. (1934). “Effect of inhomogeneity on cosmological models”. *Proceedings of the National Academy of Science* **20**:169. [pg: 43]
- Tsujikawa, S. (2007). “Matter density perturbations and effective gravitational constant in modified gravity models of dark energy”. *Physical Review D* **76**:023514, {arXiv:0705.1032 [astro-ph]}. [pg: 99]
- Tsujikawa, S. (2008). “Observational signatures of $f(R)$ dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints”. *Physical Review D* **77**:023507, {arXiv:0709.1391 [astro-ph]}. [pg: 42, 61, 69]
- Tsujikawa, S., Uddin, K., Mizuno, S., Tavakol, R., & Yokoyama, J. (2008). “Constraints on scalar-tensor models of dark energy from observational and local gravity tests”. *Physical Review D* **77**:103009, {arXiv:0803.1106 [astro-ph]}. [pg: 42, 64]
- Turner, M. S. & White, M. J. (1997). “CDM models with a smooth component”. *Physical Review D* **56**:4439, {arXiv:astro-ph/9701138}. [pg: 38]
- Utiyama, R. & DeWitt, B. S. (1962). “Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields”. *Journal of Mathematical Physics* **3**:608. [pg: 45]
- Vikhlinin, A., Kravtsov, A., Forman, W., Jones, C., Markevitch, M., et al. (2006). “Chandra sample of nearby relaxed galaxy clusters: Mass, gas fraction, and mass-temperature relation”. *The Astrophysical Journal* **640**:691, {arXiv:astro-ph/0507092}. [pg: 104]
- Vilkovisky, G. A. (1992). “Effective action in quantum gravity”. *Classical and Quantum Gravity* **9**:895. [pg: 45]
- Visser, M. (1996). *Lorentzian wormholes*. AIP Press, Woodbury, NY, EUA, {ADS:1996lowo.book.....V}. [pg: 25, 32]
- Vollick, D. N. (2003). “ $1/R$ curvature corrections as the source of the cosmological acceleration”. *Physical Review D* **68**:063510, {arXiv:astro-ph/0306630}. [pg: 55, 57, 89]
- Wagoner, R. V. (1970). “Scalar tensor theory and gravitational waves”. *Physical Review D* **1**:3209. [pg: 60]
- Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, EUA, {ADS:1984ucp..book.....W}. [pg: 46, 64]
- Wands, D. (1994). “Extended gravity theories and the Einstein–Hilbert action”. *Classical and Quantum Gravity* **11**:269, {arXiv:gr-qc/9307034}. [pg: 49]
- Wei, H. & Zhang, S. N. (2008). “How to distinguish dark energy and modified gravity?”. *Physical Review D* **78**:023011, {arXiv:0803.3292 [astro-ph]}. [pg: 61]
- Weinberg, S. (1972). *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity*. Wiley-VCH, EUA, {ADS:1972gcpa.book.....W}. [pg: 15, 21, 34]
- Weinberg, S. (1989). “The Cosmological Constant Problem”. *Reviews of Modern Physics* **61**:1,

- {ADS:1989RvMP...61....1W}. [pg: 3, 34, 35]
- Weyl, H. (1919). “A new extension of relativity theory”. *Astroparticle Physics* **59**:101. [pg: 4, 45]
- White, M. J. & Kochanek, C. S. (2001). “Constraints on the long range properties of gravity from weak gravitational lensing”. *The Astrophysical Journal* **560**:539, {arXiv:astro-ph/0105227}. [pg: 61]
- White, S. D. M., Navarro, J. F., Evrard, A. E., & Frenk, C. S. (1993). “The baryon content of galaxy clusters: A challenge to cosmological orthodoxy”. *Nature* **366**:429. [pg: 103]
- Whitt, B. (1984). “Fourth order gravity as General Relativity plus matter”. *Physics Letters B* **145**:176. [pg: 49, 59]
- Will, C. M. (1993). *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, Cambridge, RU, {ADS:1993tegp.book....W}. [pg: 9, 40, 47]
- Will, C. M. (2001). “The confrontation between general relativity and experiment”. *Living Reviews in Relativity* **4**:4, {arXiv:gr-qc/0103036}. [pg: 43]
- Yang, L., Lee, C.-C., Luo, L.-W., & Geng, C.-Q. (2010). “Observational constraints on exponential gravity”. *Physical Review D* **82**:103515, {arXiv:1010.2058 [astro-ph.CO]}. [pg: xiii, 69, 70]
- Yang, X.-J. & Chen, D.-M. (2009). “ $f(R)$ gravity theories in the Palatini Formalism constrained from strong lensing”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **394**:1449, {arXiv:0812.0660 [astro-ph]}. [pg: 92]
- Zhang, P. (2006). “Testing $f(R)$ gravity against the large scale structure of the universe.”. *Physical Review D* **73**:123504, {arXiv:astro-ph/0511218}. [pg: 69]
- Zhang, T.-J. & Ma, C. (2010). “Constraints on the dark side of the Universe and observational Hubble parameter data”. *Advances in Astronomy* **2010**:184284, {arXiv:1010.1307 [astro-ph.CO]}. [pg: 103]
- Zwicky, F. (1937). “On the masses of nebulae and of clusters of nebulae”. *The Astrophysical Journal* **86**:217, {ADS:1937ApJ....86..217Z}. [pg: 33]